OLIMPÍADA MATEMÁTICA SAN ANDRÉS DE GILES

Cuadernillo de apuntes para competencias de Olimpíada Matemática Argentina

Versión 2020

Confeccionado por el profesor Walter Oscar Rosello

Índice

Descomposición de un número según las unidades que lo constituyen

Dado un número cualquiera, por ejemplo, el número 128.796, se descompone de la siguiente manera:

1	**2**	**8**	**7**	**9**	**6**
Centena de mil	Decena de mil	Unidad de mil	Centena	Decena	Unidad

Números primos y compuestos

- **Números primos:** son aquellos que sólo admiten dos divisores, el número 1 y a sí mismo. Ejemplo: 23 es primo porque es divisible solamente por 1 y por 23.
- **Números compuestos:** son aquellos que admiten más de dos divisores. Ejemplo: el 8 es divisible por 1,2,4,8.
- El número 1 no es ni primo ni compuesto ya que tiene un solo divisor, él mismo.
- Todo número primo mayor a 3 se puede escribir de la forma **6.k+1** o **6.k + 5**.
- 3, 5 y 7 forman la única terna de primos consecutivos cuya diferencia es 2.

Números primos entre sí o coprimos

Dos números enteros **a** y **b** son números primos entre sí (o **coprimos**), si no tienen ningún factor primo en común, o, dicho de otra manera, si no tienen otro divisor común más que 1 y -1.

Por ejemplo: Si a = 9 y b = 20. Los divisores de 9 son ± 1, ± 3 y ± 9 y los divisores de 20 son ± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 10 y ± 20. Como los únicos divisores comunes con ± 1, entonces 9 y 20 son **coprimos** o **primos entre sí**.

La Criba de Eratóstenes

La Criba de Eratóstenes consiste en una tabla con los números del 1 al 100 en donde se eliminan los números que no sean primos y que, por lo tanto, sean múltiplos de algún otro número:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Descomposición de números en factores primos

Todo número puede expresarse como un producto de factores **primos**. Para descomponer un número en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

- Dividir el número por el menor número primo posible.
- Si el resultado puede dividirse nuevamente por ese número, realizar la división.
- Si el resultado no puede volver a dividirse por ese número, buscar el menor número primo posible para continuar dividiendo.
- Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & - \end{array}$$

$90 = 2.3^2.5$

Cómo saber si un número es primo

Para decidir si un número **n** es primo, basta considerar los números menores que $\sqrt{\mathbf{n}}$ y verificar que ninguno de ellos sea divisor de **n**. Basta probar sólo con los números primos menores que $\sqrt{\mathbf{n}}$**.**

Ejemplo 1: Si n = 197, entonces: $\sqrt{197} \cong 14{,}03$. Los números primos menores que $\sqrt{197}$ son: 2, 3, 5, 7, 11 y 13. Como 197 no es divisible por ninguno de ellos, entonces 197 es primo.

Ejemplo 2: Si n = 231, entonces: $\sqrt{231} \cong 15{,}19$. Los números primos menores que $\sqrt{231}$ son: 2, 3, 5, 7, 11 y 13. De la lista anterior podemos ver que 231 es divisible por 3, 7 y 11, entonces 231 no es primo.

Máximo común divisor (M.C.D.) y Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

- El **Máximo Común Divisor** es el mayor de los divisores comunes entre dos o más números. Para calcularlo, se descompone cada uno de ellos en factores primos. El M.C.D. es el resultado de multiplicar los factores que se repitan en todas las descomposiciones, afectados por el menor exponente.
  En el caso de que no se repita ningún factor, el M.C.D. de esos números es 1, y se dice que los números son "primos entre sí". Por ejemplo, el 18 y el 25 son primos entre sí.

- El **Mínimo Común Múltiplo** es, así mismo, el menor de los múltiplos comunes a varios números. Para calcularlo, descomponemos los números en factores primos, y el M.C.M es el resultado de multiplicar los factores comunes y los no comunes, afectados por el mayor exponente.
  Si los números son primos entre sí, el M.C.M. es el producto entre ellos.

Ejemplo 1:
Hallar el MCD y el mcm entre 60 y 54

60	2	54	2
30	2	27	3
15	3	9	3
5	5	3	3
1	-	1	-

$60 = 2^2.3.5$ $\quad 54 = 2.3^3$

MCD (60,54) = 2.3 = 6.
Los factores que se repiten en la descomposición de 60 y 54 el 2 y el 3. Los de menor exponente son 21 y 31, ya que los otros Son 2^2 y 3^3.
mcm (60,54) = $2^2.3^3.5$ = 540.
Factores repetidos con mayor exponente: 2^2 y 3^3. Factores no repetidos: 5.

Ejemplo 2:
Hallar el MCD y el mcm entre 36, 45 y 63

36	2	45	3	63	3
18	2	15	3	21	3
9	3	5	5	7	7
3	3	1	-	1	-
1	-				

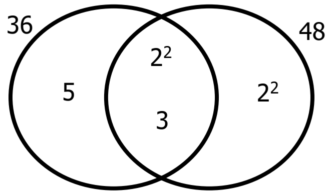
$36 = 2^2.3^2$ $\quad 45 = 3^2.5$ $\quad 63 = 3^2.7$

MCD (36,45,63) = 3^2 = 9.

mcm (36,45,63) = $2^2.3^2.5.7$ = 1260.

Otra forma de hallar el MCD y el mcm:
Ejemplo 1:
Hallar el MCD y el mcm entre 60 y 48
Se realiza la descomposición en factores primos de ambos números y se dibujan dos conjuntos, uno por cada número

60	$\boxed{2}$	48	$\boxed{2}$
30	$\boxed{2}$	24	$\boxed{2}$
15	$\boxed{3}$	12	2
5	5	6	2
1	-	3	$\boxed{3}$
		1	-

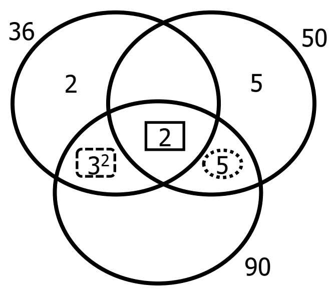


En la intersección de los dos conjuntos se colocan los factores repetidos en las descomposiciones. En este caso 2^2 y 3 (observar que son los números que se encuentran recuadrados en la descomposición).
Luego, se colocan, en el conjunto correspondiente, los factores que sobraron. (los que quedaron son recuadrar en la descomposición).

Finalmente, el MCD se calcula multiplicando todos los factores que quedaron encerrados solamente en la intersección de los conjuntos. O sea: **MCD (60,48) = 2^2.3 = 12.**
El mcm se calcula multiplicando la totalidad de los factores que quedaron en los conjuntos, tanto los de la intersección como también los que quedaron fuera de la intersección: **mcm (60,48) = $5.2^2.3.2^2$ = 240.**

Ejemplo 2:
Hallar el MCD y el mcm entre 36, 50 y 90

36	$\boxed{2}$	50	$\boxed{2}$	90	$\boxed{2}$
18	2	25	5	45	3
9	3	5	5	15	3
3	3	1	-	5	5
1	-			1	-



MCD (36,50,90) = 2.
mcm (36,50,90) = $2.3^2.2.5.5$ = 900.

Divisibilidad

Diremos que **a** | **b** (a divide a b) si y sólo si existe un **j** entero tal que **b** = **a.j**, entonces tenemos que **a** es un factor o divisor de **b**. Notar que **0** = **k.0**, entonces **k** | **0** para todo **k** $\in \mathbb{Z}$.
Por otro lado, si no existe **k** $\in \mathbb{Z}$ tal que **b** = **a.k** se dice **a** $\nmid$ **b** (**a** no divide a **b**).

Propiedades Básicas:

1) **a** | **a** (Propiedad refleja)

2) Si **a** | **b** y **b** | **c** $\Rightarrow$ **a** | **c** (Propiedad transitiva)

3) Si **a** | **b** y **b** $\neq 0 \Rightarrow |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}|$

4) Si **a** | **b** $\Rightarrow$ **a** | **(b + a.k)**, $\forall$ k $\in \mathbb{Z}$

5) Si **a** | **b** y **a** | **c** $\Rightarrow$ **a** | **(β.b + γ.c)** con $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$

6) Si **a** | **b** y **a** | (**b** + **c**) $\Rightarrow$ **a** | **c**

7) Si **a** | **b** y **b** | **a** $\Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$

8) Si **a** | **b** y **b** $\neq 0 \Rightarrow \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ | **b**

9) Si **c** $\neq 0$, **a** | **b** $\Leftrightarrow$ **a.c** | **b.c**

10) Si **MCD**(**a** , **b**) = 1 y **a** | **b.c** $\Rightarrow$ **a** | **c**

Ejemplo del uso de una de las propiedades para resolver un problema:

Problema: Encuentre los $n \in \mathbb{Z}$ tales que $4n + 2 \mid 5n + 1$

Utilizando la propiedad 4: Si a | b $\Rightarrow$ a | (b + a.k), $\forall$ k $\in \mathbb{Z}$

$4n + 2 \mid 5n + 1 \Rightarrow 4n + 2 \mid 4.(5n + 1) - 5.(4n + 2) \Rightarrow 4n + 2 \mid -6.$

Ahora tenemos que, $4n + 2$ es divisor de -6, o sea que su valor puede ser -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6. Ahora basta evaluar.

$4n + 2 = -6 \Rightarrow n = 2.$

$4n + 2 = -3 \Rightarrow n = -\frac{5}{4}.$

$4n + 2 = -2 \Rightarrow n = -1.$

$4n + 2 = -1 \Rightarrow n = -\frac{3}{4}.$

$4n + 2 = 1 \Rightarrow n = -\frac{1}{4}.$

$4n + 2 = 2 \Rightarrow n = 0.$

$4n + 2 = 3 \Rightarrow n = \frac{1}{4}.$

$4n + 2 = 6 \Rightarrow n = 1.$

Dejando sólo las soluciones enteras y evaluando en el enunciado se tiene n = -1, 1.

Algo más sobre división

- Si **n** y **q** son números naturales, y **n > q**, podemos expresar a **n** como **n = a.q + r** donde **a** es un entero positivo y **r** (el resto) es cero o **0 < r < q**.
  Ejemplo 1: 37 = 3.12 + 1 (con n = 37, q = 3).
  Ejemplo 2: 19 = 5.3 + 4 (con n = 19, q = 5).
  Esto significa que siempre se puede expresar cualquier número como un múltiplo de otro número fijo, más un resto.
  Por ejemplo, si **q = 3**, cualquier número n se puede escribir como **3.a**, **3.a + 1** o **3.a + 2**.

Criterios de divisibilidad

Los siguientes criterios nos permiten averiguar si un número es divisible por otro de una forma sencilla, sin necesidad de realizar una división:

Nº	Criterio	Ejemplo
2	El número termina en 0 o en cifra par.	374: porque "4" es par.
3	La suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	405: porque 4+0+5=9 es múltiplo de 3.
4	El número formado por las dos últimas cifras es 00 o múltiplo de 4.	7324: porque 24 es múltiplo de 4.
5	La última cifra es 0 o 5.	485: porque termina en 5.
6	El número es divisible por 2 y por 3.	7122: porque es divisible por 2 y por 3.
7	Para números de 3 cifras: Al número formado por las dos primeras cifras se le resta la última multiplicada por 2. Si el resultado es múltiplo de 7, el número original también lo es. Para números de más de 3 cifras: Dividir en grupos de 3 cifras y aplicar el criterio de arriba a cada grupo. Sumar y restar alternadamente el resultado obtenido en cada grupo y comprobar si el resultado final es un múltiplo de 7.	469: porque 46-2.9 = 28 que es múltiplo de 7. 52176376: porque (37-2.6)-(17-2.6)+(05-2.2) = 25-5+1=21 es múltiplo de 7.
8	El número formado por las tres últimas cifras es 000 o múltiplo de 8.	27280: porque 280 es múltiplo de 8.
9	La suma de sus cifras es múltiplo de 9.	3744: porque 3+7+4+4=18 es múltiplo de 9.
10	La última cifra es 0.	470: porque termina en 0.
11	Se restan y suman de manera alternada las cifras que forman el número para ver si da un múltiplo de 11 (el cero también lo es).	4972: porque 4-9+7-2 = 0 es múltiplo de 11.
12	El número es divisible por 3 y 4.	528: es divisible por 3 y por 4.
13	Para números de 3 cifras: Al número formado por las dos primeras cifras se le suma la última multiplicada por 4. Si el resultado es múltiplo de 13, el número original también lo es. Para números de más de 3 cifras: Dividir en grupos de 3 cifras, sumar y restar alternadamente los grupos de derecha a izquierda y aplicar el criterio de arriba al resultado obtenido. Si es múltiplo de 13, el número original también lo es.	364: porque 36 + 4.4 = 52 es múltiplo de 13. 432549: porque 549-432=117 y luego 11+4.7 = 39 es múltiplo de 13.
14	El número es divisible por 2 y por 7.	224: es divisible por 2 y por 7.
15	El número es divisible por 3 y por 5.	255: es divisible por 3 y por 5.
16	El número formado por las cuatro últimas cifras es múltiplo de 16.	254176: porque 4176 es múltiplo de 16.
17	Al número obtenido al suprimir la última cifra, se le resta esta última cifra multiplicada por 5, y se comprueba si el resultado es múltiplo de 17.	493: porque 49-5.3 = 34 es múltiplo de 17.
18	El número es divisible por 2 y por 9.	576: es divisible de 2 por 9.
19	Al número obtenido al suprimir la última cifra, se le suma esta última cifra multiplicada por 2, y se comprueba si el resultado es múltiplo de 19.	323: porque 32 + 3.2 = 38 es múltiplo de 19.
20	El número termina en cero y la penúltima cifra es par:	480: porque termina en 0 y 8 es par.

Aritmética Modular (Congruencia módulo m)

Muchos problemas de Cálculo con enteros muy grandes pueden reducirse a problemas equivalentes usando enteros pequeños mediante el uso de las congruencias.

Definición: Sea **m** un entero positivo y **a**, **b** dos números enteros. Diremos que **a** y **b** son congruentes módulo **m** si **m** divide a **a-b**. Utilizaremos la notación **a ≡ b (mód m)**, es decir,

$$a \equiv b \ (\text{mód } m) \Leftrightarrow m |\ a - b$$

Ejemplos:

$80 \equiv 20$ (mód 15), ya que $15|60$ 		$-5 \equiv -25$ (mód 10), ya que $10|20$

$-8 \equiv 16$ (mód 4), ya que $4|-24$ 		$12 \equiv -3$ (mód 5), ya que $5|15$

Para encontrar dos números **a** y **b** que sean congruentes módulo **m**, podemos escribir **a** como la suma de **b** y un múltiplo de **m:**

$$a = b + km \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Propiedades:

1) Reflexividad: $a \equiv a$ (mód m).

2) Simetría: $a \equiv b$ (mód m) entonces también $b \equiv a$ (mód m).

3) La expresión $a \equiv b$ (mód m) significa que **a** y **b** tienen el mismo resto en la división por m.
Por ejemplo: 15 ≡ 3 (mód 2). 15 = 7.2 + 1 y 3 = 1.2 + 1, el resto de ambas divisiones es 1.
Otra forma de expresar esto es: 3 ≡ 7 (mód 2) ⟹ 3 ≡ 1 (mód 2) y 7 ≡ 1 (mód 2).

4) Transitividad: Si $a \equiv b$ (mód m) y $b \equiv c$ (mód m) entonces también $a \equiv c$ (mód m).

5) Si $a \equiv b$ (mód m) y k es un número entero, entonces también se cumple:
   - $a + k \equiv b + k$ (mód m).
   - $ka \equiv kb$ (mód m).
   - $a^k \equiv b^k$ (mód m) (Con $k \in \mathbb{N}$)

6) Si tenemos dos congruencias con igual módulo:
$a \equiv b$ (mód m) y $c \equiv d$ (mód m) podemos sumarlas, restarlas o multiplicarlas de forma que también se verifican las congruencias:
$a + c \equiv b + d$ (mód m) ; $a - c \equiv b - d$ (mód m) y $ac \equiv bd$ (mód m).
Ejemplo de multiplicación: 12 ≡ -2 (mód 7) y 1 ≡ 15 (mód 7) ⟹ 12 ≡ -30 (mód 7).

7) Si $ab \equiv 0$ (mód m) y **a** y **m** son coprimos entre sí, entonces $b \equiv 0$ (mód m).

8) Si **d** es divisor de **m** y $a \equiv b$ (mód m), entonces $a \equiv b$ (mód d).

Teorema 1: Cualquier número entero es congruente módulo m exactamente con uno de los enteros 0, 1, … , m - 1.

Teorema 2: Dos números enteros son congruentes entre sí módulo m si, y sólo si ambos dan el mismo resto al dividirlos por m (esto está expresado en la propiedad 3).

Problemas resueltos utilizando congruencias

Problema 1: Calcular el resto de dividir 4^{100} por 3.
Solución: 4 ≡ 1 (mod 3) ⇒ $4^{100} \equiv 1^{100}$ (mod 3) ⇒ $4^{100} \equiv 1$ (mod 3). El resto de dividir 4^{100} por 3 es 1.

Problema 2: Calcular el resto de dividir 4^{100} por 5.
Solución: 4 ≡ -1 (mod 5) ⇒ $4^{100} \equiv (-1)^{100}$ (mod 5) ⇒ $4^{100} \equiv 1$ (mod 5). El resto de dividir 4^{100} por 5 es 1.

Problema 3: Calcular el resto de dividir 4^{100} por 7.
Solución: Antes que nada veamos que: $4^0 \equiv 1$ (mod 7); $4^1 \equiv 4$ (mod 7); $4^2 \equiv 2$ (mod 7); $4^3 \equiv 1$ (mod 7); ….
Los restos de las potencias de 4 al dividirlos por 7 se repiten periódicamente de 3 en 3.
Asimismo: $4^{99} \equiv (4^3)^{33} \equiv 1^{33}$ (mod 7), entonces $4^{100} \equiv 4$ (mod 7). Entonces el resto de dividir 4^{100} por 7 es 4.
Generalización que surge de este problema: $4^{(3k + r)} \equiv 4^{3k}.4^r \equiv 4^r$ (mod 7).

Problema 4: Calcular el resto de la división de 2^{2011} por 7.
Solución: Partiendo de que $2^3 = 8 \equiv 1$ (mod 7) y que $2^{2011} = 2^{3.670 + 1}$, tenemos que:

$$2^3 \equiv 1 \pmod 7$$
$$(2^3)^{670} \equiv 1^{670} \pmod 7$$
$$(2^3)^{670}.2 \equiv 1^{670}.2 \pmod 7$$
$$2^{2010}.2 \equiv 1.2 \pmod 7$$
$$2^{2011} \equiv 2 \pmod 7$$

Entonces podemos afirmar que el resto de la división de 2^{2011} por 7 es 2.

Problema 5: Calcular el resto de la división de $49^{71} + 65^{204}$ por 8.

Solución: Veamos por separado que:

$49 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 49^{71} \equiv 1^{71} \pmod 8 \Rightarrow 49^{71} \equiv 1 \pmod 8$.

$65 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 65^{204} \equiv 1^{204} \pmod 8 \Rightarrow 65^{204} \equiv 1 \pmod 8$.

Sumando ambas expresiones:

$$\begin{array}{r} 49^{71} \equiv 1 \pmod 8 \\ \underline{+\ 65^{204} \equiv 1 \pmod 8} \\ 49^{71} + 65^{204} \equiv 2 \pmod 8 \end{array}$$

Finalmente, el resto de la división de $49^{71} + 65^{204}$ por 8 es 2.

Unidad de un numero

La unidad (u) de un numero (n) es su resto en la división por 10. Aplicando congruencia modular:

$$n^x \equiv u^x (\mathrm{mod}\ 10\ )$$

Testeo de restos

Sirve para saber si una ecuación tiene solución entera. Supongamos que tenemos la ecuación de la forma $qa + r = n$ tenemos que $qa + r \equiv r(q\ )$ por lo que:

$$n \equiv r(q\ )$$

Ej.: $3x^2 + 2 = y^2$ aplicamos y tenemos que $3x^2 + 2 \equiv 2 \equiv y^2(3\ )$ y como los restos de algún d en (mod 3) siempre son 0,1,2, los cuadrados dejaran resto 0,1,4 por lo que NO existe solución en Z.

Teorema chino del resto

El Teorema chino del resto sirve para resolver un sistema de congruencias.

Dado el sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\equiv \mathbf{a_1} \ (\mathbf{mod}\ \mathbf{n_1}) \\ \mathbf{x} &\equiv \mathbf{a_2} \ (\mathbf{mod}\ \mathbf{n_2}) \\ &\vdots \\ \mathbf{x} &\equiv \mathbf{a_k} \ (\mathbf{mod}\ \mathbf{n_k}) \end{aligned}$$

Para poder utilizar este teorema es necesario que n_1, n_2, … n_k sean coprimos dos a dos.

Esto quiere decir que, tomando cualquier par de números entre n_1, n_2, … n_k, el máximo común divisor entre ellos dos siempre debe ser 1.

$\mathrm{mcd}(n_1, n_2) = 1$; $\mathrm{mcd}\ (n_2, n_3) = 1$, $\mathrm{mcd}(n_1, n_k) = 1$, etc.

Las soluciones x de este sistema son congruente módulo el producto $N = n_1.n_2. \dots .n_k$

Veamos cómo se utiliza el teorema a través de un ejemplo.

Supongamos el sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\equiv \mathbf{1} \ (\mathbf{mod}\ \mathbf{2}) \\ \mathbf{x} &\equiv \mathbf{2} \ (\mathbf{mod}\ \mathbf{3}) \\ \mathbf{x} &\equiv \mathbf{3} \ (\mathbf{mod}\ \mathbf{5}) \\ \mathbf{x} &\equiv \mathbf{4} \ (\mathbf{mod}\ \mathbf{11}) \end{aligned}$$

En este caso, debemos hallar un número x que tenga resto 1 en la división por 2, que tenga resto 2 en la división por 3, que tenga resto 3 en la división por 5 y que tenga resto 4 en la división por 11.

Tengamos presente que $\mathbf{a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3}$ y $\mathbf{a_4 = 4}$, como así también que $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$ y $n_4 = 11$. Estos datos serán utilizados más adelante.

1er paso: Lo primero que debemos hacer es verificar que 2, 3, 5 y 11 sean coprimos dos a dos, y eso efectivamente se cumple.

2do paso: Hallar el producto N multiplicando 2.3.5.11 = **330**.

3er paso: Buscar cuatro valores C_1, C_2, C_3 y C_4, obtenidos a partir de dividir 330 por cada uno de los cuatro números anteriores. O sea:

$\mathbf{C_1} = 330/2 = \mathbf{165}$

$\mathbf{C_2} = 330/3 = \mathbf{110}$

$\mathbf{C_3} = 330/5 = \mathbf{66}$

$\mathbf{C_4} = 330/11 = \mathbf{30}$

4to paso: Hallar cuatro valores d_1, d_2, d_3 y d_4 que cumplan:

$165 \,.\, d_1 = 1 \pmod 2$

$110 \,.\, d_2 = 1 \pmod 3$

$66 \,.\, d_3 = 1 \pmod 5$

$30 \,.\, d_4 = 1 \pmod{11}$

Esto se puede hacer fácilmente probando valores a partir del 1.

Resultan: $\mathbf{d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 1}$ y $\mathbf{d_4 = 7}$.

5to paso: Ahora podemos proceder a calcular una solución particular. Debemos realizar el siguiente cálculo:

$\mathbf{a_1.C_1.d_1 + a_2.C_2.d_2 + a_3.C_3.d_3 + a_4.C_4.d_4} = 1.165.1+2.110.2+3.66.1+4.30.7 = 165 + 440 + 198 + 840 = \mathbf{1643.}$

6to paso: Lo único que falta es hallar el resto de la división 1643/330 que es 323, ya que 1643 = 330.4 + 323, finalmente procedemos a armar la congruencia final.

$$\mathbf{1643 \equiv 323 \ (mod\ 330)}$$

Una solución particular al sistema anterior es el número **323**, la solución general será cualquier número que tenga la forma **323 + 330.k** ($\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$)**.**

Restos Potenciales

Se llaman **restos potenciales** de un número ***a***, con respecto a un módulo ***m***, a los restos que resultan de dividir las sucesivas potencias de ***a*** por ***m***. Aunque el número de potencias de un número ***a*** es ilimitado, sus restos potenciales con respecto al módulo ***m*** deben ser menores que ***m***, por lo tanto, el número de restos distintos será limitado.

Podemos hacer las siguientes consideraciones:

1) Si alguno de los restos potenciales es nulo, lo son también todos los siguientes.
2) Cuando un resto se repita con otro, a partir de éste los restantes se manifiestan de igual forma.
3) Al grupo de restos que se repite se le llama periodo. Si el periodo comienza con el primer resto obtenido, se dice que es periódica pura. Si el periodo no comienza por el primer resto obtenido se dice que es periódica mixta.

Ejemplos:

Restos potenciales de 17 módulo 7. 20^0 : 7 da como resto 1, o sea $20^0 \equiv 1$ (mod 7). 20^1 : 7 da como resto 6, o sea $20^1 \equiv 6$ (mod 7). 20^2 : 7 da como resto 1, o sea $20^2 \equiv 1$ (mod 7). 20^3 : 7 da como resto 6, o sea $20^3 \equiv 6$ (mod 7). …. Restos potenciales = {1, 6, 1, 6, ……}	Restos potenciales de 10 módulo 2. 10^0 : 2 da como resto 1, o sea $10^0 \equiv 1$ (mod 2). 10^1 : 2 da como resto 0, o sea $10^1 \equiv 0$ (mod 2). 10^2 : 2 da como resto 0, o sea $10^2 \equiv 0$ (mod 2). 10^3 : 2 da como resto 0, o sea $10^3 \equiv 0$ (mod 2). …. Restos potenciales = {1, 0, 0, 0, ……}

Función φ de Euler

Se define la función $\varphi(n)$ como la cantidad de naturales menores a n que son coprimos con éste.

Propiedades:

1. Si MCD(n,m) = 1, entonces $\varphi(n).\,\varphi(m) = \varphi(nm)$.
   Ejemplo: si n = 4 y m = 8, entonces $\varphi(4)$ = 2 {1, 3} y $\varphi(8)$ = 4 {1, 3, 5, 7}. Luego $\varphi(4.8) = \varphi(32)$ = 8 {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}. Finalmente $\varphi(4).\,\varphi(8) = \varphi(32)$ = 8.
2. Si p es primo, entonces $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$
   Ejemplo: Si p = 3 y k = 2, $\varphi(3^2) = \varphi(9)$ = 6 {1, 2, 4, 5, 7, 8}.
   Luego $3^2 - 3^{2-1}$ = 9 − 3 = 6.
3. Si $n = {p_1}^{\alpha_1}.\,{p_2}^{\alpha_2}\,.\,\ldots.\,{p_k}^{\alpha_k}$, entonces $\varphi(n) = n.\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right).\,\ldots\,.\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.

Teorema de Euler: Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $MCD(x,m) = 1$.
Se tiene que $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.
Ejemplo: Sean x = 5 y m = 4. Entonces $\varphi(4)$ = 2 {1, 3}. Luego $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{4}$.

Pequeño Teorema de Fermat: Sea $\boldsymbol{p}$ un primo, se tiene que $\boldsymbol{x^p \equiv x \pmod{p}}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}$.

Si x es coprimo con $p \Rightarrow x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Ejemplo: Sean x = 2 y p = 5. Entonces $2^5 \equiv 2 \pmod{5}$ y efectivamente $2^5 = 32$ tiene resto 2 en la división por 5. Veamos también que como x y p son coprimos, se cumple que $2^{5-1} \equiv 1 \pmod{5}$ y efectivamente $2^4 = 16$ tiene resto 1 en la división por 5.

Descomposición polinómica de un número

Es la descomposición de un número expresando el valor posicional de sus cifras usando potencias de la base del sistema de numeración. El número 9358, escrito en el Sistema de Numeración Decimal, se descompone en forma polinómica de esta manera:

$9358 = 9.10^3 + 3.10^2 + 5.10^1 + 8.10^0$

Si analizamos detalladamente la descomposición vemos que:

$9.10^3 = 9.1000 =$	**9000**
$3.10^2 = 3.100 =$	**300**
$5.10^1 = 5.10 =$	**+ 50**
$8.10^0 = 8.1 =$	**8**
	9358

Otros ejemplos:

$28\ 346 = 2.10^4 + 8.10^3 + 3.10^2 + 4.10^1 + 6.10^0$

$952 = 9.10^2 + 5.10^1 + 2.10^0$

Se pueden evitar escribir las cifras que son 0, ya que no cambiará el resultado. Ejemplo:

$1\ 700\ 904 = 1.10^6 + 7.10^5 + 9.10^2 + 4.10^0$

Cantidad de cifras de un número

Se sabe que un número *n* tiene *c* cifras si y solo si $10^{c-1} \leq n < 10^c$. Usando logaritmo podemos obtener la cantidad de cifras de n. Esto funciona para cualquier base.

Aplicamos log_{10} a $10^{c-1} \leq n < 10^c$. Obtenemos:

$$log\ (10^{c-1}) \leq log\ (n) < log\ (10^C)$$

$$c - 1 \leq log\ (n) < c$$

Ejemplo: ¿cuántas cifras tiene $1234567^{1234567}$?

$1234567\ log\ (1234567) = 7520382{,}984 \Longrightarrow 7520382 \leq 7520382{,}784 < c$

c = 7520383

Suma de números consecutivos

<u>*Casos impares*</u>: *n* se puede escribir como suma de *I* enteros positivos consecutivos si y solo si *n* es múltiplo de *I*. es decir $\exists k \rightarrow ik = n$ y k será el centro de la suma.

Ej.: ¿1000 o 1001 se puede escribir como suma de 11 enteros consecutivos? Como 1000 no es múltiplo de 11 no se puede, pero 1001=11x**91** por lo que 1001 se puede escribir como suma de 86+87+88+89+90+**91**+92+93+94+95+96. Donde 91 es el centro de la suma.

<u>***Casos pares:***</u> *n* se puede escribir como suma de *p* enteros positivos consecutivos si y solo si:

$$\frac{n}{p} = \cdots{,}5 = x \leftrightarrow x = \frac{a_c + a_{c+1}}{2} \leftrightarrow n = px$$

$a_c\ y\ a_{C+1}$ son el centro de la suma.

Ej.: ¿21 puede ser escrito con 6 enteros consecutivos? $21 = 6 \cdot \frac{(a_c + a_{c+1})}{2}$ donde $a_c = 3$, y el centro es 3 y 4, (1+2+3+4+5+6=21).

Bases numéricas

Existen diferentes **sistemas numéricos**, cada uno de ellos se identifica por su **base**. La **base** de un sistema numérico es el número de dígitos diferentes usados en ese sistema. los sistemas numéricos más comúnmente usados que son:

Decimal, utiliza 10 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Binario, utiliza 2 símbolos (dígitos): 0, 1.

Octal, utiliza 8 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

U otros con cualquier base:

Terciario (Base 3), utiliza 3 símbolos (dígitos): 0, 1, 2.

Cuaternario (Base 4), utiliza 4 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3.

Quinario (Base 5), utiliza 5 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4.

Senario (Base 6), utiliza 6 símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5. Etc.

Notación: Para distinguir entre los diferentes sistemas numéricos se puede encerrar entre paréntesis el número y se le añade un subíndice que indicará la base que se está usando. Si no se usa subíndice se deberá entender que el número está en base diez, a menos que se diga lo contrario.

Ejemplos:

$35 = (35)_{10}$ = 35 base 10 (sistema decimal)

$(110100)_2$ = 110100 base 2 (sistema binario)

$(203)_4$ = 203 base 4 (sistema cuaternario).

También se puede escribir el número sin paréntesis y encerrar el subíndice entre paréntesis:

Ejemplos:

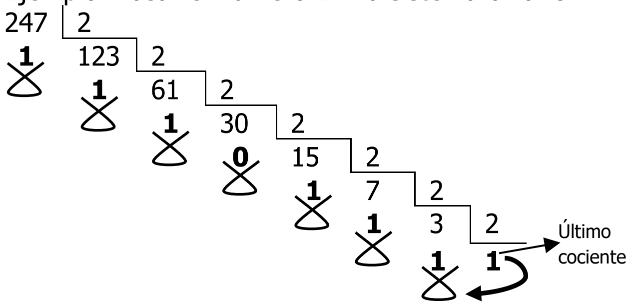
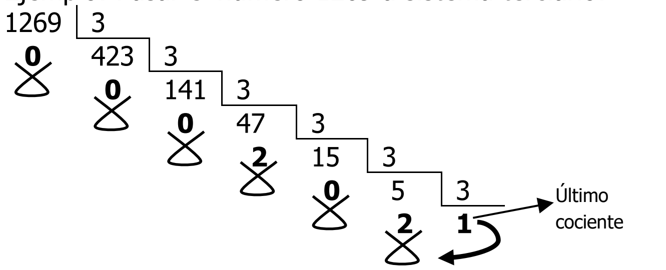
$35 = 35_{(10)}$ = 35 base 10 (sistema decimal).

$110100_{(2)}$ = 110100 base 2 (sistema binario).

$203_{(4)}$ = 203 base 4 (sistema cuaternario).

Conversión entre sistemas con distinta base numérica

- **Pasaje de un número en sistema decimal a otro sistema:** Para convertir un número entero base decimal a una nueva base, el número base decimal es sucesivamente dividido por la nueva base.

Decimal a binario (Se divide sucesivamente por 2) Ejemplo: Pasar el número 247 a sistema binario:  El resultado es el número que se obtiene al anotar el último cociente y luego todos los restos en el sentido que indica la flecha, o sea que: $\mathbf{247_{(10)} = 11110111_{(2)}}$	**Decimal a terciario** (Se divide sucesivamente por 3) Ejemplo: Pasar el número 1269 a sistema terciario:  El resultado es el número que se obtiene al anotar el último cociente y luego todos los restos en el sentido que indica la flecha, o sea que: $\mathbf{1269_{(10)} = 1202000_{(3)}}$

Análogamente, para convertir a base 4 se divide sucesivamente por 4, para convertir a base 5 se divide sucesivamente por 5, etc.

- **Pasaje de un número en un sistema cualquiera a sistema decimal:** Para convertir un número que esté dado en cualquier base a un número en base decimal se debe realizar la descomposición polinómica del número y luego resolver la cuenta. En dicha descomposición, las potencias a utilizar dependen de la base en la cual se encuentre originalmente el número. Ejemplos:
-

Binario a decimal: Se descompone utilizando potencias de 2 porque es sistema binario (base 2). Convertir $110101_{(2)}$ al sistema decimal: $110101_{(2)} = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 1.32 + 1.16 + 0.8 + 1.4 + 0.2 + 1.1 = 32+16+4+1 = 53$. O sea que: $\mathbf{110101_{(2)} = 53_{(10)}}$	**Ternario a decimal:** Se descompone utilizando potencias de 3 porque es sistema ternario (base 3). Convertir $212001_{(3)}$ al sistema decimal: $212001_{(3)} = 2.3^5 + 1.3^4 + 2.3^3 + 0.3^2 + 0.3^1 + 1.3^0 = 2.243 + 1.81 + 2.27 + 0.9 + 0.3 + 1.1 = 486+81+54+1 = 622$. O sea que: $\mathbf{212001_{(3)} = 622_{(10)}}$

Análogamente, para convertir un número en base 4 a decimal se descompone utilizando potencias de base 4, para convertir uno en base 5 se utilizan potencias de 5, etc.

Números cuadrados perfectos

Un número es **cuadrado perfecto** cuando resulta ser el resultado de elevar al cuadrado algún número entero. La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es siempre un número entero. Los primeros cuadrados perfectos son:

Cuadrado perfecto	Porque	Cuadrado perfecto	Porque	Cuadrado perfecto	porque
0	$0^2 = 0$	**9**	$3^2 = 9$	**36**	$6^2 = 36$
1	$1^2 = 1$	**16**	$4^2 = 16$	**49**	$7^2 = 49$
4	$2^2 = 4$	**25**	$5^2 = 25$	**64**	$8^2 = 64$

Cuadrados perfectos: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361,400,…

- Un número **n** es **cuadrado perfecto** si y sólo sí, en su factorización tiene todos exponentes pares. Además el 1 es cuadrado perfecto.
  Ejemplo: La factorización de 144 es $2^4.3^2$ Como ambos exponentes son pares, entonces 144 es cuadrado perfecto.
- Un número **n** es **cuadrado perfecto** si y sólo sí tiene una cantidad impar de divisores positivos.
  Ejemplo: Los divisores positivos de 64 son: 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 64. Entonces 64 tiene siete divisores positivos. Como siete es impar, entonces 64 es un cuadrado perfecto.
- Todo cuadrado perfecto es de la forma **4.k** o **4.k+1** y de la forma **3.k** o **3.k+1**.

Fórmula que vincula a un cuadrado perfecto con los tres cuadrados perfectos anteriores:

$$(n + 3)^2 = 3(n + 2)^2 – 3(x + 1)^2 + n^2.$$

Por ejemplo: $(1 + 3)^2 = 3.(1 + 2)^2 – 3.(1 + 1)^2 + 1^2 \Rightarrow 4^2 = 3.3^2 – 3.2^2 + 1^2 \Rightarrow 16 = 3.9 – 3.4 + 1$.

Otro ejemplo (más resumido): 49 = 3.36 – 3.25 + 16.

Números primos que se pueden escribir como suma de dos cuadrados:

Sea **n** un entero positivo, entonces la ecuación $\mathbf{x^2 + y^2 = n}$, tiene soluciones enteras si y sólo sí, en la factorización en números primos de **n**, todos los primos de la forma **4k+3** aparecen con exponente par.

Ejemplos:

- 123 no se puede escribir como suma de dos cuadrados, pues 123 = 3.41, así que tenemos un primo de la forma 4k+3 (4.0+3 = 3) que aparece con exponente impar.
- 1234 sí se puede escribir como suma de dos cuadrados, pues 1234 = 2.617 (no hay primos de la forma 4k+3). De hecho, es $1234 = 3^2 + 35^2$.
- 19845 sí se puede escribir como suma de dos cuadrados, pues $19845 = 3^4.5.7^2$, es decir, los primos de la forma 4k+3 (3 y 7) aparecen con exponente par (notemos que 5 tiene exponente impar, pero eso no importa pues no es de la forma 4k+3). Concretamente $19845 = 63^2 + 126^2$.

Números cubos perfectos

Un número es un **cubo perfecto** cuando resulta ser el resultado de elevar al cubo algún número entero. La raíz cúbica de un cubo perfecto es siempre un número entero. Los primeros cubos perfectos son:

Cubo perfecto	porque	Cubo perfecto	porque	Cubo perfecto	porque
0	$0^3 = 0$	**27**	$3^3 = 27$	**216**	$6^3 = 216$
1	$1^3 = 1$	**64**	$4^3 = 64$	**343**	$7^3 = 343$
8	$2^3 = 8$	**125**	$5^3 = 125$	**512**	$8^3 = 512$

Cubos perfectos: 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913,…

Contar cuadrados y cubos perfectos

La **cantidad de cuadrados perfectos** que hay entre 1 inclusive y k es $[\sqrt{k}]$, los corchetes indican que se debe tomar solamente la parte entera de $\sqrt{k}$. Por ejemplo, entre 1 y 58 hay $[\sqrt{58}] = 7$ cuadrados perfectos, en efecto, ellos son: 1, 4, 9, 16, 25, 36 y 49.

La **cantidad de cubos perfectos** que hay entre 1 inclusive y k es $[\sqrt[3]{k}]$, los corchetes indican que se debe tomar solamente la parte entera de $\sqrt[3]{k}$. Por ejemplo, entre 1 y 200 hay $[\sqrt[3]{200}] = 5$ cubos perfectos, en efecto, ellos son: 1, 8, 27, 64 y 125.

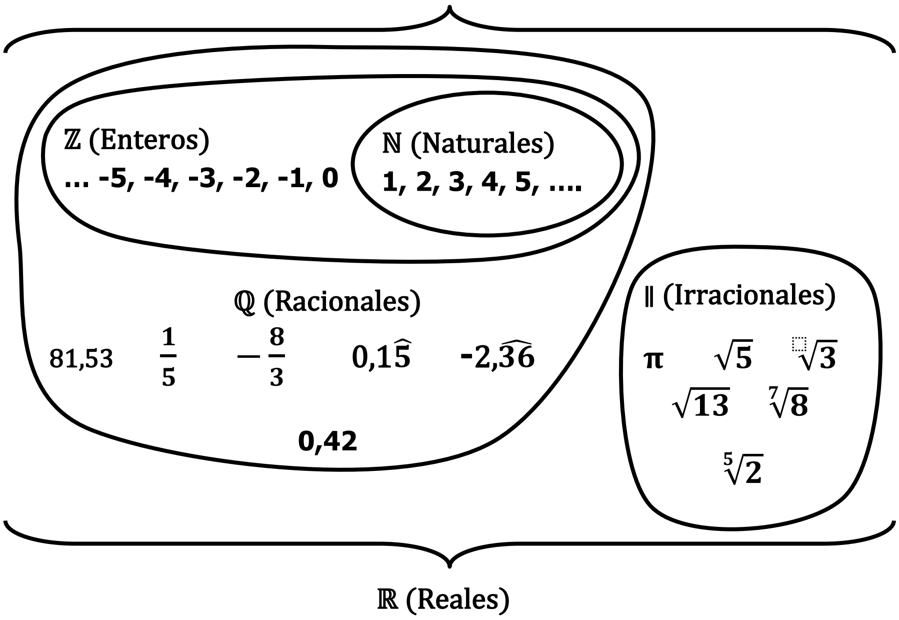
Vamos a suponer que tenemos que contar la cantidad de cuadrados y cubos perfectos que hay entre 1 y 5000. En ese caso: Cuadrados perfectos: $[\sqrt{5000}] = 70$. Cubos perfectos: $[\sqrt[3]{5000}] = 17$.

Pero cuidado, porque algunos son cuadrados y cubos perfectos al mismo tiempo. Ellos son las potencias sextas. Entonces para saber cuántos están repetidos debemos calcular: $[\sqrt[6]{5000}] = 4$.

Finalmente, la cantidad de cuadrados y cubos perfectos que hay entre 1 y 5000 inclusive es: 70 + 17 – 4 = 83.

Conjuntos numéricos

Naturales (ℕ): Son los números enteros (sin parte decimal) positivos.
Enteros (ℤ): Son los números enteros (sin parte decimal) positivos, negativos y el cero. (Los números naturales también son enteros).
Racionales (ℚ): Fracciones, decimales finitos, decimales periódicos puros y decimales periódicos mixtos. (Los números naturales y enteros también son racionales).
Irracionales (𝕀): Son los números que poseen infinitas cifras decimales no periódicas.
Reales (ℝ): Es el conjunto formado por los números racionales e irracionales



Transformar un número decimal a fracción

Decimales finitos	Decimales periódicos puros	Decimales periódicos mixtos
En el numerador: Se escribe todo el número sin la coma. En el denominador: Se escribe un 1 y luego tantos ceros como números haya después de la coma. Ejemplo 1: $5,23 = \frac{523}{100}$ Ejemplo 2: $0,7 = \frac{7}{10}$ Ejemplo 3: $17,711 = \frac{17711}{1000}$	En el numerador: Se escribe todo el número sin la coma ni el arco y luego se resta todo lo que no está debajo del arco. En el denominador: Se escribe un 9 por cada número que haya después de la coma y se encuentre debajo del arco. Ejemplo 1: $3,\hat{6} = \frac{36-3}{9} = \frac{33}{9}$ Ejemplo 2: $1,\widehat{342} = \frac{1342-1}{999} = \frac{1341}{999}$	En el numerador: Se escribe todo el número sin la coma ni el arco y luego se resta todo lo que no está debajo del arco. En el denominador: En cuanto a lo que se encuentra después de coma, se escribe un 9 por cada número que se encuentre debajo del arco y un cero por cada número que no esté debajo del arco. Ejemplo: $2,5\widehat{78} = \frac{2578-25}{990} = \frac{2553}{990}$

Generalizaciones Importantes

Generalización 1 (Números Periódicos)		Generalización 2
$\mathbf{0,\overline{a_1a_2\ldots a_k} = \frac{a_1a_2\ldots a_k}{10^k-1}}$ Ejemplo: $0,\overline{25} = \frac{25}{10^2-1} = \frac{25}{99}$	$\mathbf{b,\overline{a_1a_2\ldots a_k} = b + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{10^k-1}}$ Donde **b** es la parte entera (no decimal) del número Ejemplo: $18,\overline{4} = 18 + \frac{4}{10^1-1} = 18 + \frac{4}{9} = \frac{166}{9}$	$\frac{\mathbf{10^n-1}}{\mathbf{9}} = \underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{veces}}$

Generalización 3:
Si **k** es la cantidad de acarreos al hacer la suma **a + b**, entonces: **S(a+b) = S(a) + S(b) – 9k**
Donde, S(a) es la suma de dígitos del número a, S(b) es la suma de dígitos del número b, y S(a+b) es la suma de los dígitos del número a+b.
Ejemplo: a= 138 b = 986. Entonces k=3, S(a)=12, S(b)=23. Vemos entonces que S(a+b)=12+23-9.3 = 8.
Teniendo en cuenta que a + b = 1124, vemos claramente que S(a+b) = 8.

Generalización 4: Suma de los primeros n números naturales: Si se quiere saber el resultado de la suma de los primero n números naturales, se puede utilizar la siguiente fórmula:

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{\mathbf{n.(n+1)}}{\mathbf{2}}$

Por ejemplo, la suma de los primeros 10 números naturales es: $1+2+\ldots+10 = \frac{10.(10+1)}{2} = \frac{110}{2} = 55$.

Propiedades de la potenciación

1) **Potencia de exponente 0:** Toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1.
   $\mathbf{a^0 = 1}$ (si se cumple que $a \neq 0$)

2) **Producto de potencias de igual base:** El producto de dos o más potencias de igual base ***a*** es igual a la potencia de base ***a*** y exponente igual a la suma de los correspondientes exponentes.
   Se coloca la misma base y se suman los exponentes. $\mathbf{a^b \, . \, a^c = a^{b+c}}$
   Ejemplos: a) $2^4 \, . \, 2^5 = 2^9$ b) $3^3 \, . \, 3 \, . \, 3^4 = 3^8$.

3) División de potencias de igual base: La división de dos potencias de igual base **a** es igual a la potencia de base **a** y exponente igual a la resta de los exponentes respectivos.
   Se coloca la misma base y se restan los exponentes. $\mathbf{a^b : a^c = a^{b-c}}$ **También:** $\mathbf{\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}}$
   Ejemplos: a) $2^6 : 2^2 = 2^4$ b) $\frac{3^9}{3^4} = 3^5$

4) **Potencia de potencia:** La potencia de una potencia de base **a** es igual a la potencia de base **a** elevada a la multiplicación de ambos exponentes.
   Se coloca la misma base y se multiplican los exponentes. $\mathbf{\left(a^b\right)^c = a^{b.c}}$
   Ejemplo: $(8^3)^5 = 8^{15}$

5) **Propiedad distributiva:** La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división pero no lo es con respecto a la suma y la resta.
   Multiplicación: $\mathbf{(a \, . \, b)^c = a^c \, . \, b^c}$ División: $\mathbf{\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}}$

- **Propiedad de las potencias de 2:** Hay una sola forma de escribir un número entero positivo como suma de potencias distintas de 2.
  Por ejemplo: $3942 = 2^{11} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2$.

Propiedades de la radicación

1) **Ley distributiva de la radicación respecto de la multiplicación:** $\mathbf{\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b}}$
   Ejemplo: $\sqrt[4]{81 \, . \, 16} = \sqrt[4]{81} \, . \, \sqrt[4]{16} = 3 \, . \, 2 = 6$

2) **Ley distributiva de la radicación respecto de la división:** $\mathbf{\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} \, / \, \sqrt[n]{b}}$
   Ejemplo: $\sqrt[3]{64 / 8} = \sqrt[3]{64} \, / \, \sqrt[3]{8} = 4 / 2 = 2$

3) **Raíz de raíz:** $\mathbf{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}}$
   Ejemplo: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2.3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$.

4) **Simplificación de índice y exponente:** Si el exponente del radicando positivo es igual, divisor o múltiplo del índice, se puede simplificar exponente con índice:
   Ejemplos:
   a) $\sqrt[7]{2^7} = 2$ b) $\sqrt[9]{27^3} = \sqrt[3]{27^1} = 3$ c) $\sqrt[5]{3^{25}} = \sqrt[1]{3^5} = 3^5$.
   Atención: la simplificación de índice y exponente no puede efectuarse cuando el radicando es negativo y el índice es par.
   Ejemplo: $\sqrt[4]{(-3)^2}$ (No se pueden simplificar el índice y el exponente).

5) **Exponentes Racionales:** La base de la potencia es el radicando, el denominador del exponente racional es el índice de la raíz y el numerador del exponente racional es el exponente del radicando:
   $\mathbf{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$
   Ejemplo: $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$

6) **Potencia de una raíz:** $\mathbf{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$ Ejemplo: $\mathbf{\left(\sqrt[3]{9}\right)^2 = \sqrt[3]{9^2}}$

Operaciones con radicales

Suma y resta de radicales: Al sumar o al restar términos que contengan radicales semejantes, podemos obtener una expresión de un solo término:

Ejemplo 1: $8\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$

Ejemplo 2: $\sqrt{32} + \sqrt{2} - \sqrt{8}$

En este caso, los radicales no son semejante, pero haciendo una adecuada descomposición en factores primos de los radicandos y utilizando las propiedades adecuadas, podemos llegar a obtener radicales semejantes:

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	-

8	2
4	2
2	2
1	-

O sea que: $32 = 2^5$ y $8 = 2^3$

Por lo tanto: $\sqrt{32} + \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2^5} + \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2^2.2} + \sqrt{2} - \sqrt{2^2.2} = \sqrt{2^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2^2}.\sqrt{2} = 2.2.\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2.\sqrt{2} = 4.\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2.\sqrt{2} = 3.\sqrt{2}$

Multiplicación y división de radicales:

Radicales del mismo índice: para multiplicar o dividir radicales del mismo índice, seguimos el procedimiento inverso a la aplicación de la propiedad distributiva, es decir:

$$\sqrt{\mathbf{a}}\ .\ \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a}\ .\ \mathbf{b}} \qquad \frac{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}}}{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{b}}} = \sqrt[\mathbf{n}]{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$$

Ejemplos: $\sqrt{2^3}\ .\ \sqrt{5} = \sqrt{2^3\ .5} = \sqrt{8\ .5} = \sqrt{40}$ $\qquad \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

Radicales de índices distintos: debemos hallar radicales equivalentes de modo tal que todos tengan el mismo índice:

Ejemplo 1: Para multiplicar: $\sqrt[6]{2}\ .\ \sqrt[4]{3}$, hacemos así:

- Hallamos el *múltiplo común menor* entre los índices: m.c.m (6,4) = 12
- Hallamos radicales equivalentes a los dados, que tengan índice 12:

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt[2.6]{2^2} = \sqrt[12]{2^2}$$
$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[3.4]{3^3} = \sqrt[12]{3^3}$$

- Multiplicamos los radicales que obtuvimos:

$$\sqrt[12]{2^2}\ .\ \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^2.3^3} = \sqrt[12]{4\ .27} = \sqrt[12]{108}$$

Ejemplo 2: Para realizar la siguiente división, aplicamos un procedimiento similar:

$$\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{3^2}} = \sqrt[4]{\frac{6}{3^2}} = \sqrt[4]{\frac{6}{9}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

Racionalización de denominadores

1er caso: El denominador contiene un solo término con un radical de índice 2.

Ejemplo: Racionalicemos el denominador de la expresión: $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical que aparece en el denominador:

$$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

Se obtiene una expresión en donde en el denominador ya no aparecen raíces.

2do caso: El denominador contiene un solo término con un radical de índice mayor que 2.

Ejemplo: Racionalicemos el denominador de la expresión $\frac{1}{\sqrt[5]{6^2}}$

Como el radical tiene índice mayor que 2, buscamos un factor conveniente para eliminarlo del denominador. Una regla práctica para eliminar un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ (con $n > m$) consiste en multiplicar el numerador y el denominador por otro radical de la forma $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{6^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{6^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^3}} = \frac{\sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^2}.\sqrt[5]{6^3}} = \frac{\sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^5}} = \frac{\sqrt[5]{6^3}}{6}$$

3er caso: el denominador es una suma o una resta de donde aparecen uno o dos radicales de índice 2.

Recordemos que **(a + b). (a - b) = a² – b²**. A las expresiones **a + b** y **a – b** las llamamos **conjugadas**.

Ejemplo: Racionalicemos el denominador de la expresión $\frac{3}{2+\sqrt{5}}$

Multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que aparece en el denominador.

$$\frac{3}{2+\sqrt{5}} = \frac{3}{(2+\sqrt{5})} \cdot \frac{(2-\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})} = \frac{3.(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5}).(2-\sqrt{5})} = \frac{6-3\sqrt{5}}{4-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{5^2}} = \frac{6-3\sqrt{5}}{4-5} =$$

$$= \frac{6-3\sqrt{5}}{-1} = \frac{6}{-1} - \frac{3\sqrt{5}}{-1} = -6 + 3\sqrt{5}$$

Progresiones Aritméticas

Una progresión aritmética es una sucesión en la cual cada término se obtiene sumando al término anterior un número fijo llamado razón.

Término general de una progresión aritmética: Si en una progresión aritmética d es la razón y a_1 es el primer término, el término general será: $a_n = a_1 + d.(n - 1)$

Suma de términos de una progresión aritmética: Se denomina con S_n a la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética. Esta suma está dada por la siguiente fórmula:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).n$$

Importante: Tres números a, b, c están en progresión aritmética si y sólo si **a + c = 2b**.

Progresiones Geométricas

Una Progresión geométrica está constituida por una secuencia de elementos en la que cada uno de ellos se obtiene multiplicando el anterior por una constante denominada razón de la progresión.

Término general de una progresión geométrica conociendo el primer término: Si en una progresión geométrica d es la razón y a_1 es el primer término, el término general será:

$$a_n = a_1 . d^{(n-1)}$$

Término general de una progresión geométrica conociendo cualquier término: Si en una progresión geométrica d es la razón y a_k es el valor del término que ocupa la posición k; el término general será:

$$a_n = a_k . d^{(n-k)}$$

Suma de términos de una progresión geométrica: Se denomina con S_n a la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. Esta suma está dada por la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{a_n . d - a_1}{d - 1}$$

Importante: Tres números a, b, c están en progresión geométrica si y sólo si **a.c = b²**.

Sucesiones importantes

- Números pares: 2, 4, 6, 8, 10, … Término general: $a_n = 2n$
- Números impares: 1, 3, 5, 7, 9, … Término general: $a_n = 2n - 1$
- Los cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25,… Término general: $a_n = n^2$
- Los cubos: 1, 8, 27, 64, 125,… Término general: $a_n = n^3$
- Potencias de 2: 2, 4, 8, 16, … Término general: $a_n = 2^n$
- Sucesiones que cambian de signo:
  - ✓ -1, 1, -1, 1, -1, 1, … Término general: $a_n = (-1)^n$
  - ✓ 1, -1, 1, -1, 1, -1, … Término general: $a_n = (-1)^{n+1}$ o $a_n = (-1)^{n-1}$
- **Sucesión de Fibonacci**: Comienza con los números 1 y 1 y a partir de éstos, cada término se obtiene sumando los dos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

  Término general: $a_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ siendo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Número áureo).

Combinatoria

Permutaciones: Cada una de las formas distintas en que se pueden ordenar n elementos en n casilleros, sin repetirlos, se denomina permutación. El número de permutaciones que pueden obtenerse con los n elementos se simboliza Pn y se lee "permutaciones de n elementos".

En general, el número de permutaciones de **n** elementos, se puede calcular mediante la expresión:

$$P_n = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,\ldots\,.\,1$$

$$P_n = n!$$

Ésta última expresión se lee "**factorial de n**" o "**n factorial**".
Las calculadoras tienen una tecla que permite calcular permutaciones. Esta es **x!.** Por ejemplo, si hay que calcular 5!, se presiona:5,x! y luego =.

Variaciones: Cada una de las formas distintas en que se pueden ordenar n elementos en r casilleros (n > r), sin repetirlos, se denomina variación. Dos formas que tengan los mismos elementos, pero en distinto orden, son consideradas distintas. **El "número" de** variaciones **que se pueden obtener con los** n **elementos se simboliza** $V_{n,r}$ **y se lee "**variaciones **de** n **elementos tomados de a** r**".**

Las variaciones de **n** elementos agrupados de a **r** pueden calcularse, utilizando factoriales, mediante la siguiente expresión:

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Las calculadoras tienen una tecla que permite calcular variaciones. Esta es $_n\mathbf{P}_r$ con n > r. Para calcular primero se ingresa el valor de n, luego se presiona sobre la tecla $_n\mathbf{P}_r$ y finalmente se ingresa el valor de r y se presiona =.

Combinaciones: Cada una de las formas distintas en que se pueden seleccionar **r** elementos diferentes de un total de **n**, sin considerar el orden de los mismos, se denomina combinación.

No tener en cuenta el orden de los elementos significa que dos formas que tengan los mismos elementos, pero en distinto orden, son consideradas iguales. El número de combinaciones que pueden obtenerse con los **n** elementos elegidos, sin repetirlos, se simboliza $\mathbf{C}_{n,r}$ y se lee "**combinaciones** de **n** elementos agrupados de a **r**".

Las combinaciones se calculan mediante la siguiente expresión:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

La expresión $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ se indica con el símbolo $\binom{n}{r}$, que se lee: **número combinatorio n,r.**

Las calculadoras tienen una tecla que permite calcular combinaciones. Esta es $_n\mathbf{C}_r$ con n > r. Para calcular primero se ingresa el valor de n, luego se presiona sobre la tecla $_n\mathbf{C}_r$ y finalmente se ingresa el valor de r y se presiona =.

Cuadro resumen general de combinatoria

Nombre	¿Influye el orden?	¿Puede haber repetición?	Elementos por grupo (totales)	Elementos disponibles (seleccionados)	Fórmula	Observaciones	Calculadora
Permutación sin repetición	Si	No	n	n	$P_n = n!$	n=n	n!
Permutación con repetición	Si	Si	n	n	$P'_{n;\,k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_r!}$ $(k_1 + k_2 + \ldots + k_r \leq n)$		
Variación sin repetición	Si	No	n	r	$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	n≥r	nPr
Variación con repetición	Si	Si	n	r	$V'_{n,r} = n^r$	n>r o n≤r	^

Combinación sin repetición	No	No	n	r	$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	$n \geq r$	nCr
Combinación con repetición	No	Si		n	$C'_{n+(r-1);r} = \binom{n+(r-1)}{r}$	n = elementos a seleccionar. r = Elementos distintos.	

Distribuir k pelotitas en n cajas

Si hay que distribuir k pelotitas en n cajas numeradas desde 1 hasta n, tengo

$$\binom{k+n-1}{n-1} \text{ formas.}$$

Triángulo de Tartaglia o Pascal

n = 0						1					
n = 1					1		1				
n = 2				1		2		1			
n = 3			1		3		3		1		
n = 4		1		4		6		4		1	
n = 5	1		5		10		10		5		1

$$n = 0 \qquad \binom{0}{0}$$
$$n = 1 \qquad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$n = 2 \qquad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$n = 3 \qquad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$n = 4 \qquad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$n = 5 \qquad \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Utilizando combinaciones también se puede construir el triángulo de Pascal.

Binomio de Newton

$(a + b) = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

....

Si nos fijamos atentamente, los coeficientes coinciden con los del triángulo de Pascal, los exponentes de "**a**" van disminuyendo desde **n** hasta **0** y los de **b** van aumentando desde **0** hasta **n**, y en cada término la suma de los exponentes de **a** y **b** es igual a **n**.

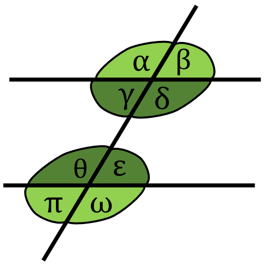
Generalización: $(a + b)^n = a^n b^0 + a^{n-1} b^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a^1 b^{n-1} + a^0 b^n$

Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una transversal

Ángulos interiores y exteriores

Los ángulos ubicados en la zona comprendida entre las rectas paralelas, se llaman ángulos interiores.

Los ángulos que no son interiores se denominan ángulos exteriores:

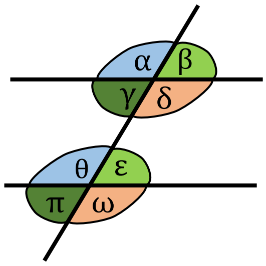


Son ángulos interiores: γ, δ, θ y ε.

Son ángulos exteriores: α, β, π y ω.

Ángulos correspondientes

Si dos ángulos están ubicados de un mismo lado de la transversal, uno es interior y el otro exterior, pero no adyacentes, se los llama ángulos correspondientes.



Son correspondientes:

α y θ

β y ε

γ y π

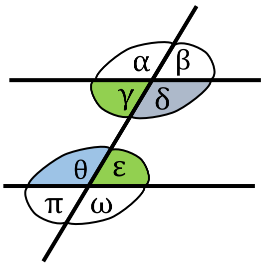
δ y ω

Los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.

Recíprocamente, si dos rectas cortadas por una tercera forman ángulos correspondientes iguales, las rectas son paralelas.

Ángulos alternos internos

Si dos ángulos están situados en distinto semiplano con respecto de la transversal, y ambos son internos, se los llama ángulos alternos internos.



Son alternos internos:

δ y θ

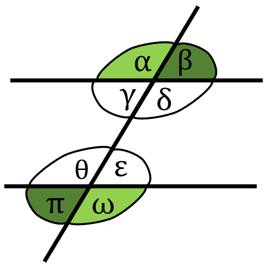
γ y ε

Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.

Recíprocamente, si dos rectas cortadas por una tercera forman ángulos alternos internos iguales, las rectas son paralelas.

Ángulos alternos externos

Si dos ángulos están situados en distinto semiplano con respecto de la transversal, y ambos son externos, se los llama ángulos alternos externos.



Son alternos externos:

α y ω

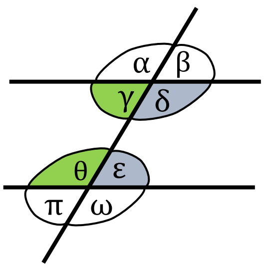
β y π

Los ángulos alternos externos entre paralelas son iguales.

Recíprocamente, si dos rectas cortadas por una tercera forman ángulos alternos externos iguales, las rectas son paralelas.

Ángulos conjugados internos

Si dos ángulos están situados en un mismo semiplano con respecto de la transversal, y ambos son internos, se los llama ángulos conjugados internos.



Son conjugados internos:

δ y ε

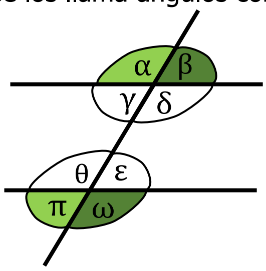
γ y θ

Los ángulos conjugados internos entre paralelas son suplementarios (o sea que suman 180º).

Recíprocamente, si dos rectas cortadas por una tercera forman ángulos conjugados internos suplementarios, las rectas son paralelas.

Ángulos conjugados externos

Si dos ángulos están situados en un mismo semiplano con respecto de la transversal, y ambos son externos, se los llama ángulos conjugados externos.



Son conjugados externos:

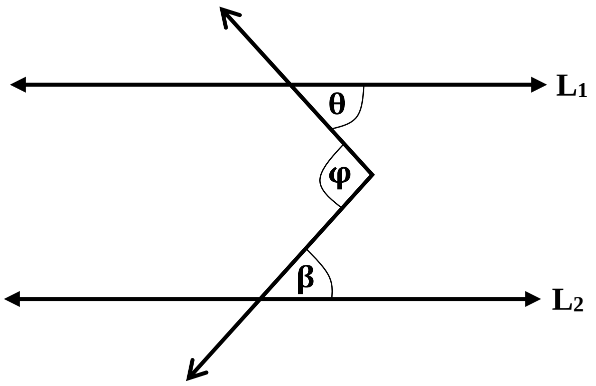
α y π

β y ω

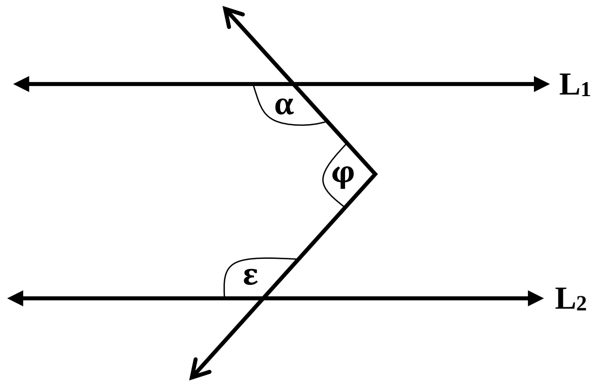
Los ángulos conjugados externos entre paralelas son suplementarios (o sea que suman 180º).

Recíprocamente, si dos rectas cortadas por una tercera forman ángulos conjugados externos suplementarios, las rectas son paralelas.

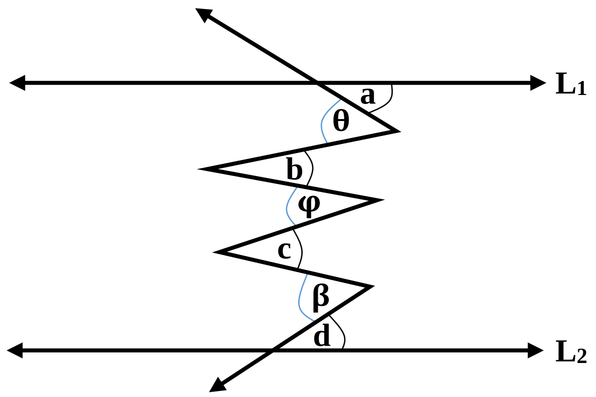
Otras propiedades de los ángulos entre rectas paralelas



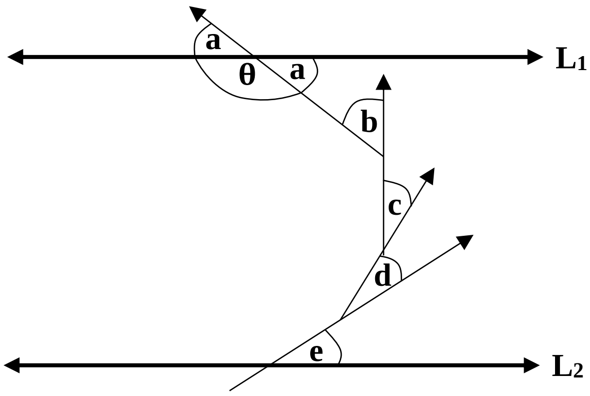
Si $L_1 \parallel L_2$ entonces se cumple: $\varphi = \theta + \beta$



Si $L_1 \parallel L_2$ entonces se cumple: $\alpha + \varphi + \varepsilon = 360^\circ$



Si $L_1 \parallel L_2$ entonces: $\beta + \varphi + \theta = a + b + c + d$



Si $L_1 \parallel L_2$ entonces: $a + b + c + d + e = 180^\circ$

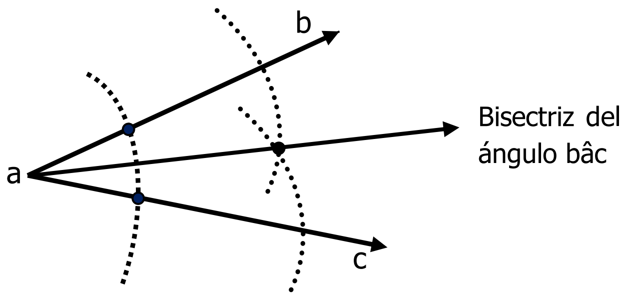
$\theta = b + c + d + e$

Bisectriz de un ángulo

La semirrecta que divide un ángulo en otros dos ángulos iguales se llama bisectriz.

Para trazar la bisectriz de un ángulo, se debe tomar el compás, pinchar en el vértice del ángulo y trazar un arco que corte ambos lados. Desde las intersecciones del arco trazado y los lados del ángulo, sin cambiar la abertura del compás, trazar otros dos arcos.

Con la regla, dibujar una semirrecta con origen en el vértice del ángulo y que pase por el punto común de los dos arcos trazados anteriormente.



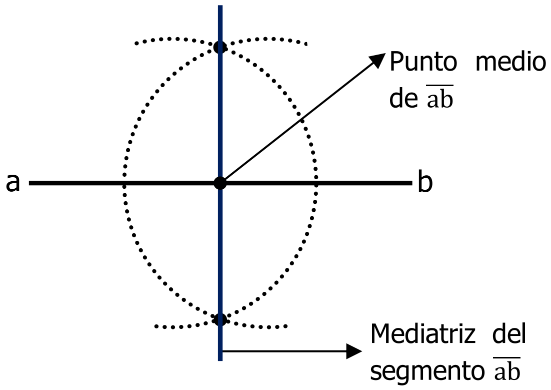
Mediatriz de un segmento

La recta perpendicular a un segmento que lo corta en su punto medio se llama mediatriz.

Para trazar la mediatriz de un segmento $\overline{ab}$ debemos tomar el compás con una abertura mayor a la mitad del segmento, pinchar la aguja del compás en el punto "a" y trazar un arco de circunferencia. Luego, sin modificar la abertura del compás, repetimos el procedimiento con centro en el punto "b".

Finalmente dibujamos la recta que pasa por las intersecciones de los arcos formados.

Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.



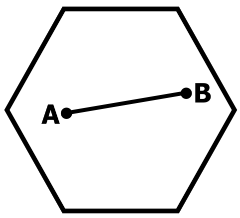
Polígonos

Los polígonos son figuras formadas por varias líneas a las que llamamos lados. Para que una figura formada por líneas se considere un polígono es indispensable que estas líneas formen una figura cerrada.

La palabra polígono viene del griego polygonos. De *polys* que significa muchos y de *gonia* que significa ángulos. Digamos que la "traducción" más precisa de la palabra polígono sería "figura que tiene muchos ángulos".

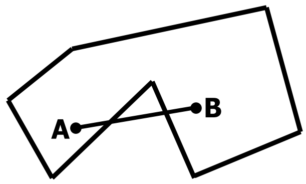
Polígonos convexos:

Son aquellos tales que, para todo par de puntos contenidos en la región interior, el segmento que determinan está contenido íntegramente en esa región.



Polígonos cóncavos:

Son aquellos donde es posible encontrar dos puntos en su región interior tales que el segmento que determinan posee, al menos, un punto en la región exterior.



Éstos son los nombres de los polígonos de hasta veinte lados:

Número de Lados	Nombre del Polígono
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono

Número de Lados	Nombre del Polígono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
13	Triskaidecágono
14	Tetradecágono

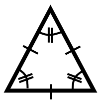
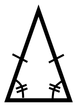
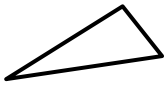
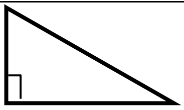
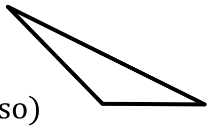
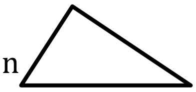
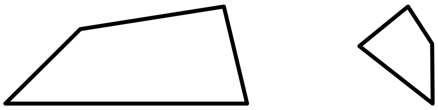
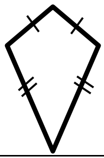
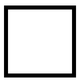
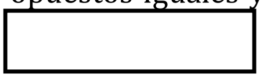
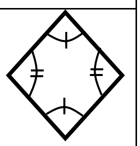
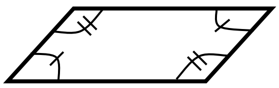
Número de Lados	Nombre del Polígono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octadecágono
19	Eneadecágono
20	Icoságono

Propiedades de los polígonos

Siendo **n** el número de lados del polígono:

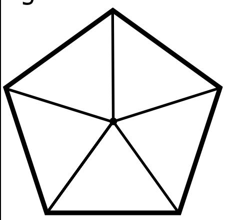
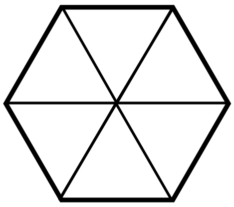
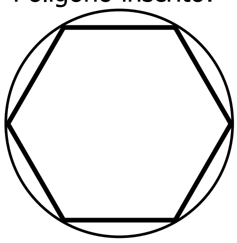
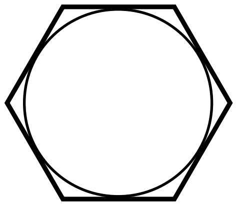
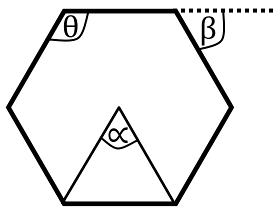
- **SAI (Suma de los ángulos interiores de un polígono):** $180^\circ \cdot (n - 2)$
- **SAE (Suma de los ángulos exteriores de un polígono):** 360°
- **Diagonales por vértice:** $n - 3$
- **Diagonales totales:** $\frac{n\,.(n-3)}{2}$

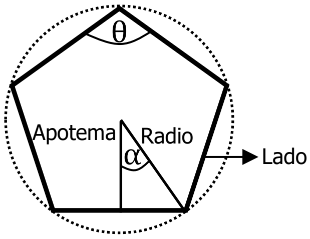
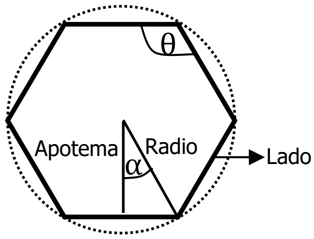
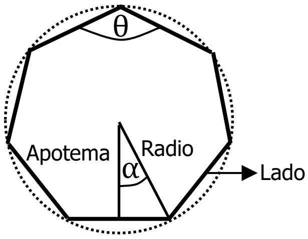
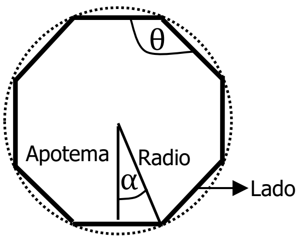
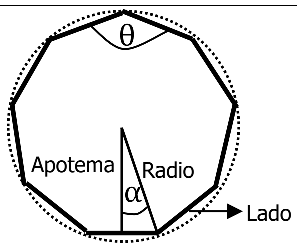
Clasificación de Polígonos

Triángulos (Polígono de tres lados)	**Según sus Lados**	**Equiláteros** (Tres lados iguales y tres ángulos de 60°) 
		Isósceles (Dos lados iguales y dos ángulos iguales) 
		Escalenos (Todos los lados diferentes) 
	Según sus ángulos	**Rectángulo** (Uno de sus ángulos es recto) 
		Obtusángulo (Uno de sus ángulos es obtuso) 
		Acutángulo (Sus ángulos son todos agudos) 
Cuadriláteros (Polígono de cuatro lados)	**Trapezoide**	Ningún par de lados paralelos 
	Deltoide (también llamado romboide)	Tiene dos lados consecutivos iguales y los otros dos lados distintos de los anteriores pero iguales entre sí. 
	Trapecio	Tiene un par de lados paralelos. 
	Paralelogramos (Tienen dos pares de lados paralelos)	**Cuadrado:** Tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. 
		Rectángulo: Tiene sus lados opuestos iguales y sus cuatro ángulos rectos. 
		Rombo: Tiene sus cuatro lados iguales y sus ángulos opuestos iguales. 
		Paralelogramos (propiamente dicho): Tiene dos pares de lados paralelos y sus ángulos opuestos son iguales. 

Polígonos regulares

Un polígono regular es un polígono en el que todos los lados tienen la misma longitud y todos los ángulos interiores son de la misma medida.

Todos los polígonos regulares se pueden dividir en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono.  	Todo polígono regular se puede inscribir o circunscribir en circunferencias. Polígono inscrito:  Polígono circunscrito: 	Ángulos de un polígono:  θ = Ángulo interior. $\propto$ = Ángulo central. β = Ángulo exterior.

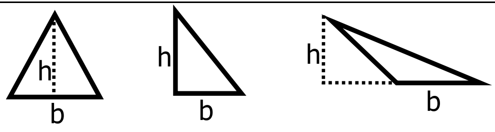
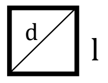
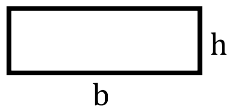
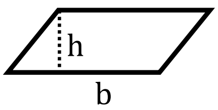
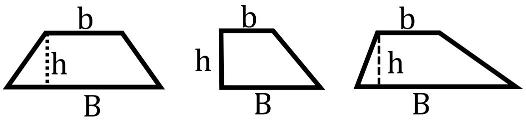
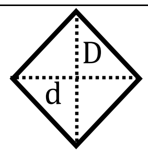
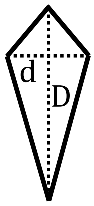
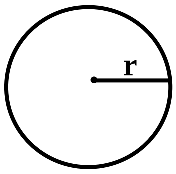
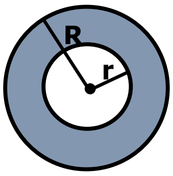
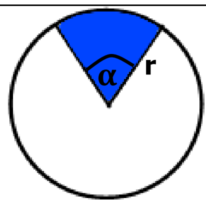
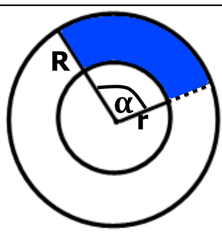
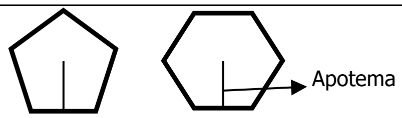
Polígonos Regulares	**Pentágono regular** (Cinco lados)		2α=Ángulo central. θ = Ángulo interior.
	Hexágono Regular (Seis lados)		2α=Ángulo central. θ = Ángulo interior.
	Heptágono regular (Siete lados)		2α=Ángulo central. θ = Ángulo interior.
	Octágono regular (Ocho lados)		2α=Ángulo central. θ = Ángulo interior.
	Eneágono regular (Nueve lados)		2α=Ángulo central. θ = Ángulo interior.

Propiedades de los polígonos regulares

Siendo **n** el número de lados del polígono:

- **Cada ángulo interior de un polígono regular de n lados mide:** $180º \cdot \frac{(n-2)}{n}$
- **Cada ángulo exterior de un polígono regular de n lados mide:** $\frac{360°}{n}$
- **A todo polígono regular se le puede inscribir y circunscribir una circunferencia.**
- **El ángulo central tiene la misma medida que el ángulo exterior.**

Superficie (o área) de figuras planas - Fórmulas

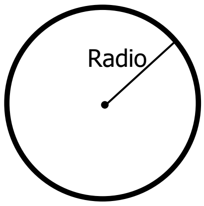
Nombre	Grafico	Fórmula
Triángulo		$\text{Superficie} = \dfrac{b\,.\,h}{2}$
Cuadrado		$\text{Superficie} = l^2 = l.l$ Otra: $\text{Superficie} = d^2/2$
Rectángulo		$\text{Superficie} = b\,.\,h$
Paralelogramo		$\text{Superficie} = b\,.\,h$
Trapecio		$\text{Superficie} = \dfrac{(B + b)\,.\,h}{2}$
Rombo		$\text{Superficie} = \dfrac{D\,.\,d}{2}$
Deltoide (también llamado romboide)		$\text{Superficie} = \dfrac{D\,.\,d}{2}$
Círculo		$\text{Superficie} = \pi\,.\,r^2$
Corona circular		$\text{Superficie} = \pi\,.\,(R^2 - r^2)$
Sector circular		$\text{Superficie} = \dfrac{\pi.\,\mathbf{r^2}.\,\alpha}{\mathbf{360°}}$
Trapecio circular		$\text{Superficie} = \dfrac{\pi.(\,\mathbf{R^2} - \mathbf{r^2}).\,\alpha}{\mathbf{360°}}$
Polígonos Regulares		$\text{Sup.} = \dfrac{\text{Perímetro}\,.\,\text{Apotema}}{\mathbf{2}}$

Circunferencia y círculo

¿Es lo mismo decir circunferencia que círculo? No…
No se debe confundir **circunferencia** con **círculo**, aunque ambos conceptos están estrechamente relacionados.

Circunferencia:

Es el conjunto de los puntos pertenecientes a un mismo plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado **centro**, ubicado en el mismo plano. La distancia desde el centro a un punto de la circunferencia se denomina **radio.**

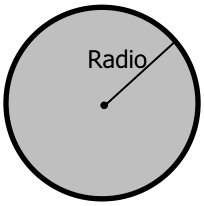


En la circunferencia se mide la longitud (su perímetro).
La longitud de una circunferencia se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\mathbf{L = 2.\pi.R}$$

Círculo:

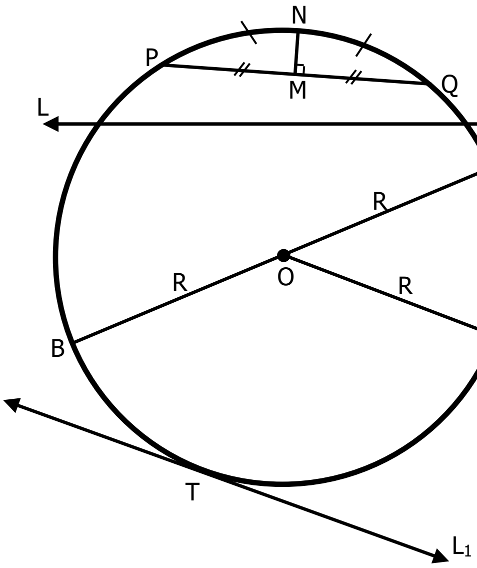
Superficie determinada por la unión de una circunferencia y su región interior.



En el círculo se puede hallar su área mediante la siguiente fórmula:

$$\mathbf{A = \pi.R^2}$$

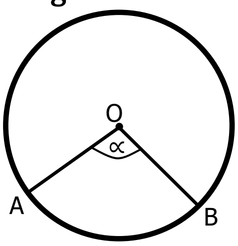
Elementos de la circunferencia



- **Centro O:** Es el punto interior que equidista de todos los puntos de la circunferencia.
- **Radio $\overrightarrow{OA}$ = R:** Segmento que va desde el centro a cualquier punto de la circunferencia.
- **Diámetro $\overline{BC}$ = 2R:** Segmento que pasa por el centro y cuyos extremos están en la circunferencia. Es la cuerda máxima, divide a la circunferencia en dos partes iguales llamadas semicircunferencia.
- **Arco AC:** Es la parte que está delimitada por dos puntos de la circunferencia.
- **Cuerda $\overline{PQ}$:** Es un segmento cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia.
- **Recta Secante L:** Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
- **Recta Tangente L_1:** Recta que corta a la circunferencia en un solo punto.
- **Punto de tangencia T:** Punto de intersección entre la recta tangente y la circunferencia.
- **Flecha o Sagita $\overline{MN}$:** Porción del radio.

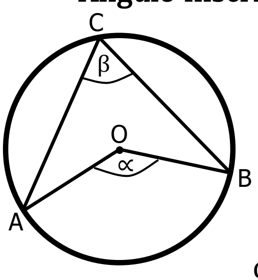
Ángulos en circunferencia

Ángulo central



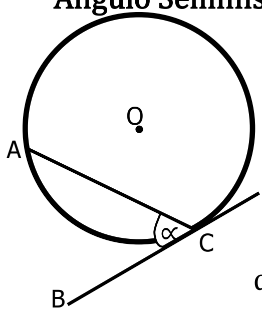
$\alpha = \widehat{AB}$

Ángulo Inscrito



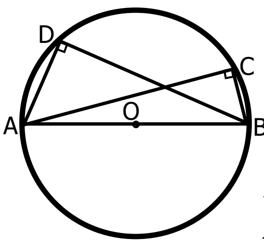
$\alpha = 2\beta$

Ángulo Semiinscrito



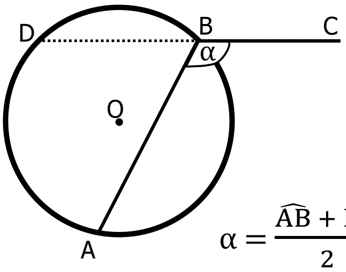
$\alpha = \frac{\widehat{AC}}{2}$

Ángulo inscrito en una semicircunferencia



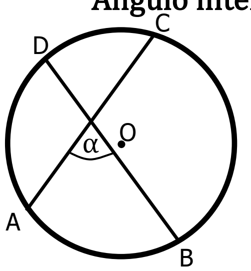
$A\hat{C}B = 90°$
$A\hat{D}B = 90°$

Ángulo exinscrito

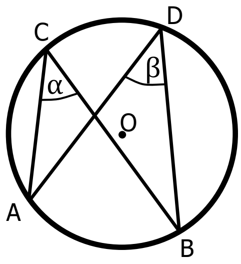
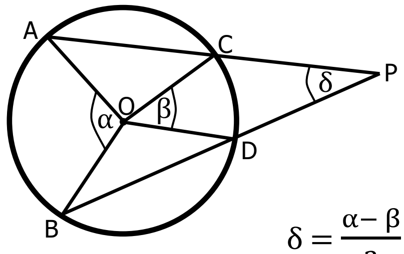
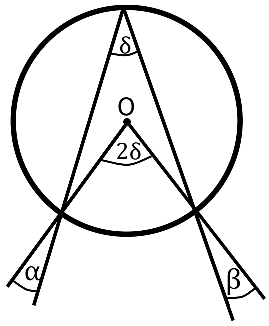


$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{DB}}{2}$

Ángulo interior



$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$

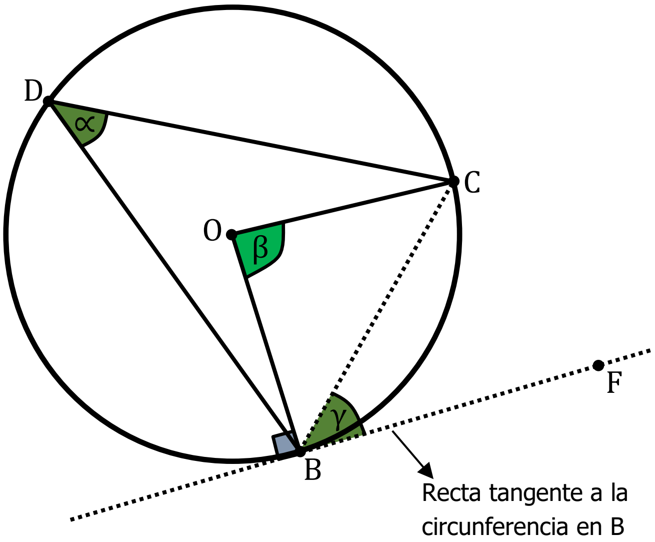
Igualdad de ángulos inscritos	Ángulo exterior	
 $\alpha = \beta$ $A\hat{C}B = A\hat{D}B$	 $\delta = \frac{\alpha - \beta}{2}$	 $\delta = \alpha + \beta$

Relación entre el ángulo central, inscrito y semiinscrito en una circunferencia

El ángulo central es el formado por dos radios de una circunferencia, por lo que su vértice es el centro de ésta. En el ejemplo es el ángulo $C\hat{O}B$ o β.

Es ángulo inscrito es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son rectas secantes. En el ejemplo es el ángulo $C\hat{D}B$ o $\propto$.

El ángulo semiinscrito es aquél cuyo vértice está en la circunferencia, un lado es secante y el otro es tangente a ella. En el ejemplo es el ángulo $C\hat{B}F$ o γ.

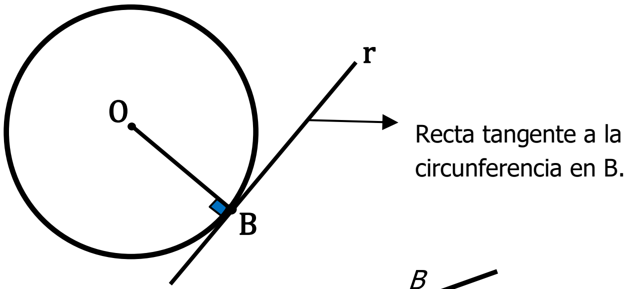


Propiedades:

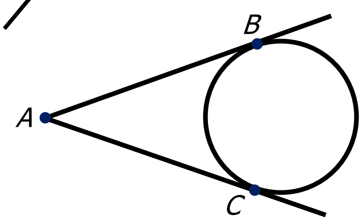
$\propto\ = \gamma$ $\qquad \beta = 2.\propto$ $\qquad \beta = 2.\gamma$

Recta tangente a una circunferencia

Decimos que una recta es tangente a una circunferencia si la corta en un solo punto. Sea **B** un punto en una circunferencia de centro **O**. Si una recta **r** es tangente a una circunferencia en un punto **B**, se tiene que **OB** $\perp$ **r.** Recíprocamente, la recta perpendicular a **OB** que pasa por **B** es tangente a la circunferencia.



Propiedad de las rectas tangentes a una circunferencia: Si dos rectas tangentes a una circunferencia se cortan en un punto exterior A, los segmentos determinados por el punto A y los puntos de tangencia son iguales.

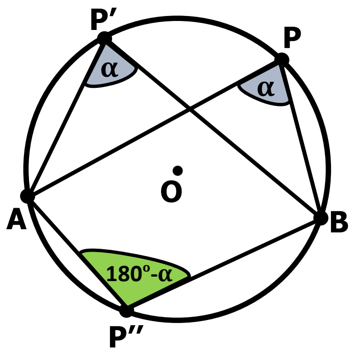


$\overline{AB} = \overline{AC}$

Arco Capaz

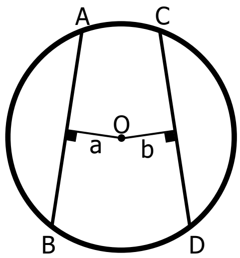
Sean **A**, **B**, **P** puntos en una circunferencia de centro **O**.

- Si **P'** es un punto del arco **AB** que contiene a **P** entonces $\widehat{AP'B} = A\hat{P}B$.
- Si **P''** es un punto del arco **AB** que no contiene a **P** entonces $\widehat{AP''B} = 180° - A\hat{P}B$.



Otras propiedades importantes

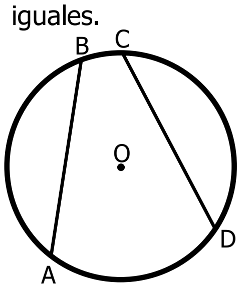
Las cuerdas que equidistan del centro son de igual medida:



Si: a = b

Entonces:
$\overline{AB} = \overline{BC}$

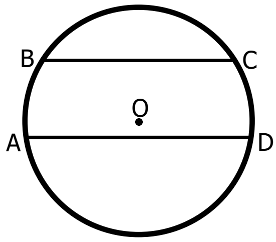
Si trazamos dos cuerdas de la misma longitud, entonces los arcos que subtienden cada una son iguales.



Si: $\overline{AB} = \overline{CD}$

Entonces:
$\widehat{AB} = \widehat{CD}$

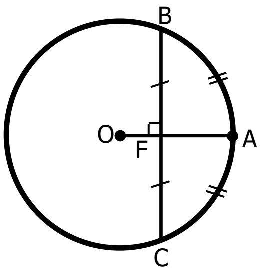
Si se trazan dos cuerdas paralelas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ son de igual medida.



Si: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Entonces:
$\widehat{AB} = \widehat{CD}$

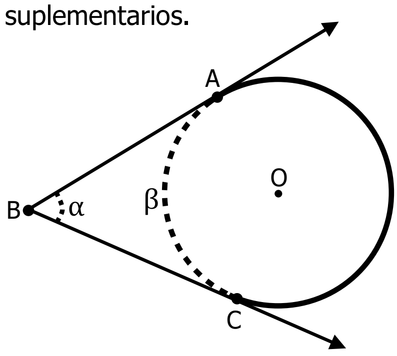
Si un radio es perpendicular a una cuerda, el radio pasa por el punto medio de la cuerda y del arco correspondiente a la cuerda.



Si: $\overline{OA} \perp \overline{BC}$

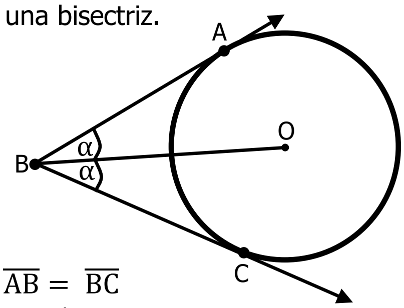
Entonces:
$\overline{BF} = \overline{FC}$
$\widehat{BA} = \widehat{AC}$

El ángulo exterior y un arco formado por dos tangentes son suplementarios.



$$\alpha + \beta = 180°$$

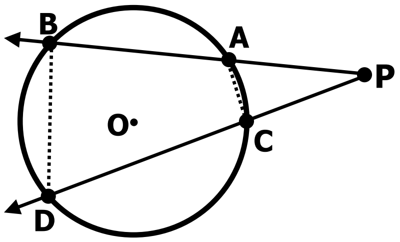
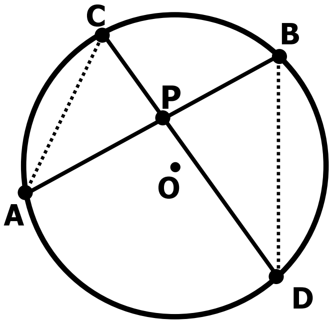
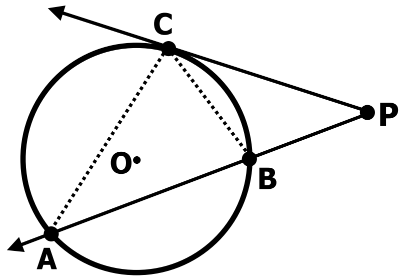
Si desde el vértice donde se unen las tangentes trazamos un segmento que se une con el centro de la circunferencia, el segmento es una bisectriz.



$\overline{AB} = \overline{BC}$
Y ambas son tangentes.
Entonces: $\overline{OB}$ es bisectriz de $A\hat{B}C$.

Potencia de un punto

Si dos rectas que pasan por un punto **P**, cortan a una circunferencia fija en los puntos **A**, **B** y **C**, **D** respectivamente, entonces $\overline{\mathbf{PA}}\,.\,\overline{\mathbf{PB}} = \overline{\mathbf{PC}}\,.\,\overline{\mathbf{PD}}$

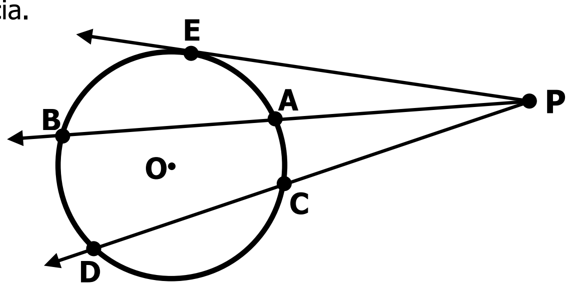
P exterior a la circunferencia	P interior a la circunferencia	Una secante y una tangente
 Los triángulos APC y DPB son semejantes y de esa semejanza se deduce $\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$ y por lo tanto: $\overline{\mathbf{PA}}\,.\,\overline{\mathbf{PB}} = \overline{\mathbf{PC}}\,.\,\overline{\mathbf{PD}}$	 Los triángulos APC y DPB son semejantes y de esa semejanza se deduce $\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$ y por lo tanto: $\overline{\mathbf{PA}}\,.\,\overline{\mathbf{PB}} = \overline{\mathbf{PC}}\,.\,\overline{\mathbf{PD}}$	 Los triángulos PAC y PCB son semejantes y de esa semejanza se deduce $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$ y por lo tanto: $\overline{\mathbf{PA}}\,.\,\overline{\mathbf{PB}} = (\overline{\mathbf{PC}})^2$

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente, si **P** es un punto exterior a una circunferencia por el que pasan tres rectas, dos secantes y una tangente a la circunferencia.

Si las secantes cortan a la circunferencia en **A**, **B** y **C**, **D** respectivamente y la tangente lo hace en **E**.

Entonces se cumple:

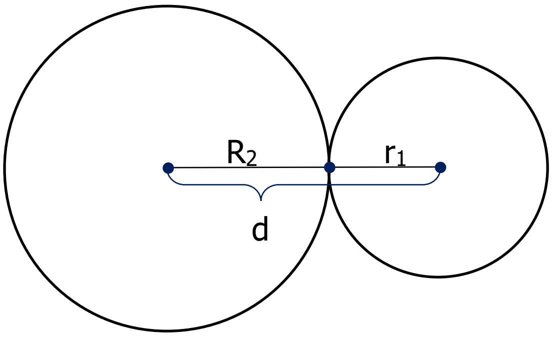
$$\overline{\mathbf{PA}}\,.\,\overline{\mathbf{PB}} = \overline{\mathbf{PC}}\,.\,\overline{\mathbf{PD}} = (\overline{\mathbf{PE}})^2$$



Circunferencias tangentes

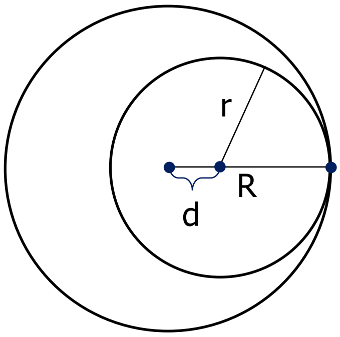
Si dos circunferencias son tangentes, sus centros y el punto de tangencia están alineados.

Circunferencias tangentes exteriores



La distancia entre los centros es igual a la suma de los radios (d = R + r).

Circunferencias tangentes interiores

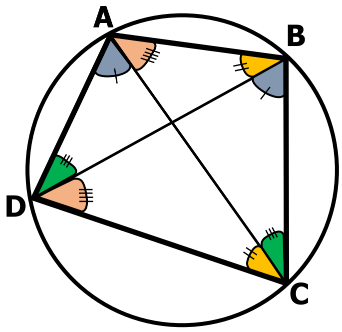


La distancia entre los centros es igual a la resta de los radios (d = R – r).

Cuadriláteros cíclicos

Un cuadrilátero es cíclico si sus ángulos opuestos suman 180°. Además, es condición necesaria y suficiente que se pueda inscribir en una circunferencia. Es decir, cualquier cuadrilátero que se pueda inscribir en una circunferencia será cíclico, por lo que sus ángulos opuestos sumarán 180°.

Recíprocamente, se puede decir que un cuadrilátero es cíclico si hay una circunferencia que pasa por todos sus vértices.



Si ABCD es cíclico, se cumple que:

- ABCD se puede inscribir en una circunferencia.
- Los ángulos opuestos son suplementarios, o sea que, suman 180°:
  $A\hat{B}C + C\hat{D}A = D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180°$.
- $D\hat{A}C = D\hat{B}C$
  $A\hat{B}C = A\hat{C}D$
  $B\hat{C}A = B\hat{D}A$
  $C\hat{D}B = C\hat{A}B$

Además, en todo cuadrilátero cíclico se cumple el siguiente teorema:

Teorema de Ptolomeo: Sea ABCD un cuadrilátero cíclico de diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Entonces se cumple que el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos, es decir:

$$\overline{\mathbf{AC}}\,.\,\overline{\mathbf{BD}} = \overline{\mathbf{AB}}\,.\,\overline{\mathbf{CD}} + \overline{\mathbf{BC}}\,.\,\overline{\mathbf{DA}}$$

Fórmula de Brahmagupta: Si a, b, c, y d son las longitudes de los lados de un cuadrilátero cíclico, $S = \frac{a+b+c+d}{2}$ es el semiperímetro del cuadrilátero, entonces el área del cuadrilátero es:

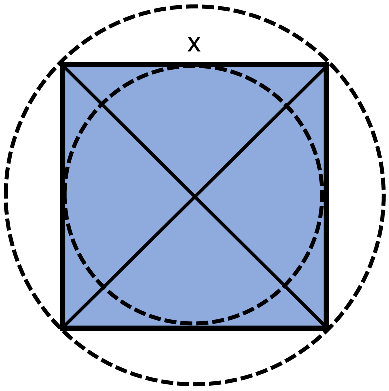
$$\mathbf{A} = \sqrt{(\mathbf{S}-\mathbf{a}).(\mathbf{S}-\mathbf{b}).(\mathbf{S}-\mathbf{c}).(\mathbf{S}-\mathbf{d})}$$

Cuadriláteros

Fuente: http://es.onlinemschool.com/

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados cuyos ángulos interiores suman 360°.

Cuadrado

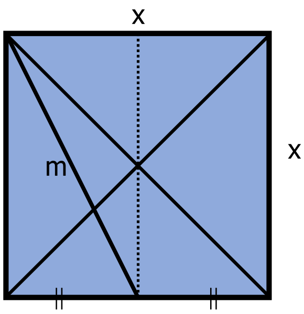


- Cuatro lados iguales.
- Cuatro ángulos de 90°.
- Diagonales:
  - Son iguales.
  - Son perpendiculares.
  - Se cortan en su punto medio.
  - Cada diagonal de un cuadrado lo divide en dos figuras simétricas iguales.
  - El punto de intersección de las diagonales se llama centro del cuadrado y también es el centro de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.
  - Las diagonales son bisectrices de cada uno de los ángulos del cuadrado. O sea, lo cortan en dos ángulos iguales, por lo tanto, ambos miden 45°.
  - Las dos diagonales dividen al cuadrado en cuatro triángulos iguales. Estos triángulos son al mismo tiempo isósceles y rectángulos.

Lado de un cuadrado:

- Fórmulas para hallar la longitud del lado x de un cuadrado:
  - En función del radio r de la circunferencia inscrita: $\mathbf{x = 2.r}$
  - En función del radio R de la circunferencia circunscrita: $\mathbf{x = R.}\sqrt{2}$

Diagonales de un cuadrado:



- La diagonal de cualquier cuadrado siempre mide $\sqrt{2}$ veces más que su lado.
- Fórmulas para hallar la longitud de la diagonal d de un cuadrado:
  - En función del lado x del cuadrado: $\mathbf{d = x.}\sqrt{2}$
  - En función del área A del cuadrado: $\mathbf{d} = \sqrt{2.A}$
  - En función del perímetro P del cuadrado: $\mathbf{d} = \frac{P}{2\sqrt{2}}$
  - En función del radio R de la circunferencia circunscrita: $\mathbf{d = 2.R}$
  - En función del diámetro D_0 de la circunferencia circunscrita: $\mathbf{d = D_0}$
  - En función del radio r de la circunferencia inscrita: $\mathbf{d = 2.r.}\sqrt{2}$
  - En función del diámetro d_0 de la circunferencia inscrita: $\mathbf{d = d_0.}\sqrt{2}$
  - En función de la longitud del segmento m: $\mathbf{d = m.}\frac{2\sqrt{10}}{5}$

Perímetro de un cuadrado: Se llama perímetro de un cuadrado a la suma de las longitudes de todos sus lados.

- Fórmulas del perímetro P de un cuadrado:
  - En función del lado x del cuadrado: $\mathbf{P = 4.x}$
  - En función del área A del cuadrado: $\mathbf{P = 4.}\sqrt{A}$
  - En función de la diagonal d del cuadrado: $\mathbf{P = 2.d.}\sqrt{2}$
  - En función del radio R de la circunferencia circunscrita: $\mathbf{P = 4.R.}\sqrt{2}$
  - En función del diámetro D_0 de la circunferencia circunscrita: $\mathbf{P = 2.D_0.}\sqrt{2}$
  - En función del radio r de la circunferencia inscrita: $\mathbf{P = 8.r}$
  - En función del diámetro d_0 de la circunferencia inscrita: $\mathbf{P = 4.d_0}$
  - En función de la longitud del segmento m: $\mathbf{P = m.}\frac{8}{\sqrt{5}}$

Área de un cuadrado: Se llama área de un cuadrado al espacio limitado por sus lados.

- El área de un cuadrado es más grande que el área de cualquier cuadrilátero que tenga su mismo perímetro.
- Fórmulas del área A de un cuadrado:
  - En función del lado x del cuadrado: $\mathbf{A = x^2 = x.x}$

- En función del perímetro P del cuadrado: **A =** $\mathbf{\frac{P^2}{16}}$
- En función de la diagonal d del cuadrado: **A =** $\mathbf{\frac{d^2}{2}}$
- En función del radio R de la circunferencia circunscrita: **A = 2.R²**
- En función del diámetro D_0 de la circunferencia circunscrita: **A =** $\mathbf{\frac{(D_0)^2}{2}}$
- En función del radio r de la circunferencia inscrita: **A =** $\mathbf{4.r^2}$
- En función del diámetro d_0 de la circunferencia inscrita: **A =** $\mathbf{(d_0)^2}$
- En función de la longitud del segmento m: **A =** $\mathbf{m^2.\frac{16}{\sqrt{5}}}$

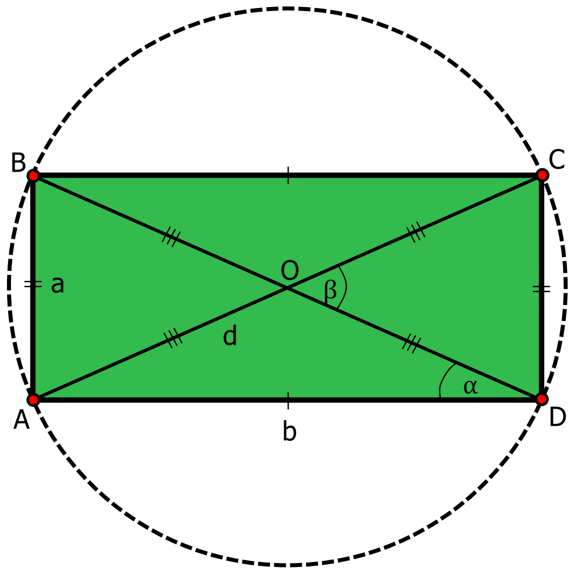
Circunferencia circunscrita a un cuadrado: Se llama circunferencia circunscrita a un cuadrado a la circunferencia que pasa por los cuatro vértices del cuadrado y tiene su centro en la intersección de las diagonales del cuadrado.

- El radio de una circunferencia circunscrita alrededor de un cuadrado es siempre $\sqrt{2}$ veces más grande que el radio de una circunferencia inscrita.
- El radio de una circunferencia circunscrita alrededor de un cuadrado es igual a la mitad de una diagonal.
- El área de un círculo circunscrito alrededor de un cuadrado es $\frac{\pi}{2}$ veces más grande que el área del cuadrado.
- Fórmulas para hallar el radio R de una circunferencia circunscrita alrededor de un cuadrado:
  - En función del lado x del cuadrado: **R =** $\mathbf{x.\frac{\sqrt{2}}{2}}$
  - En función del perímetro P del cuadrado: **R =** $\mathbf{\frac{P}{4\sqrt{2}}}$
  - En función del área A del cuadrado: **R =** $\mathbf{\frac{\sqrt{2.A}}{2}}$
  - En función de la diagonal d del cuadrado: **R =** $\mathbf{\frac{d}{2}}$
  - En función del diámetro D_0 de la circunferencia circunscrita: **R =** $\mathbf{\frac{D_0}{2}}$
  - En función del radio r de la circunferencia inscrita: **R =** $\mathbf{r.\sqrt{2}}$
  - En función del diámetro d_0 de la circunferencia inscrita: **R =** $\mathbf{d_0.\frac{\sqrt{2}}{2}}$
  - En función de la longitud del segmento m: **R =** $\mathbf{m.\frac{\sqrt{10}}{5}}$

Circunferencia inscrita en un cuadrado: Se llama circunferencia inscrita en un cuadrado a la circunferencia que corta al cuadrado en las mitades de todos sus lados y tiene su centro en la intersección de las diagonales de un cuadrado.

- El radio de una circunferencia inscrita es igual a la mitad del lado del cuadrado.
- El área de un círculo inscrito en un cuadrado es $\frac{\pi}{4}$ veces menos que el área del cuadrado.
- Fórmulas para hallar el radio r de una circunferencia inscrita en un cuadrado:
  - En función del lado x del cuadrado: **r =** $\mathbf{\frac{x}{2}}$
  - En función del perímetro P del cuadrado: **r =** $\mathbf{\frac{P}{8}}$
  - En función del área A del cuadrado: **r =** $\mathbf{\frac{\sqrt{A}}{2}}$
  - En función de la diagonal d del cuadrado: **r =** $\mathbf{\frac{d}{2.\sqrt{2}}}$
  - En función del radio R de la circunferencia circunscrita: **r =** $\mathbf{\frac{R}{\sqrt{2}}}$
  - En función del diámetro D_0 de la circunferencia circunscrita: **r =** $\mathbf{\frac{D_0}{2.\sqrt{2}}}$
  - En función del diámetro d_0 de la circunferencia inscrita: **r =** $\mathbf{\frac{d_0}{2}}$
  - En función de la longitud del segmento m: **r =** $\mathbf{\frac{m}{\sqrt{5}}}$

Rectángulo



- Lados iguales 2 a 2.
- Los lados opuestos de un rectángulo tienen la misma longitud, o sea, son iguales: AB = CD, BC = AD.
- Los lados opuestos de un rectángulo son paralelos: AB ∥ CD, BC ∥ AD.
- Los lados adyacentes de un rectángulo siempre son perpendiculares: AB ⊥ BC, BC ⊥ CD, CD ⊥ AD, AD ⊥ AB.
- Los cuatro ángulos de un rectángulo miden 90°. La suma de las amplitudes de los ángulos interiores es 360°.
- Diagonales:
  - Son iguales.
  - Son oblicuas.
  - Se cortan en su punto medio: AO = BO = CO = DO = $\frac{d}{2}$.
  - La suma de los cuadrados de las diagonales de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrado de los lados: $2d^2 = 2a^2 + 2b^2$.
  - Cada diagonal de un rectángulo lo divide en dos figuras iguales (dos triángulos rectángulos).
  - El punto de intersección de las diagonales es el centro del rectángulo y también es el centro de la circunferencia circunscrita. La diagonal de un rectángulo en el diámetro de la circunferencia circunscrita.
  - Siempre se puede circunscribir una circunferencia alrededor de un rectángulo ya que la suma de los ángulos opuestos es 180°, o sea que es un cuadrilátero cíclico.

- En un rectángulo cuya longitud de la base no coincida con la longitud de la altura, no se puede inscribir una circunferencia ya que la suma de los lados opuestos no son iguales entre sí. Sólo se puede inscribir una circunferencia en un rectángulo que sea un cuadrado.

Lados de un rectángulo:

- Fórmulas para hallar la longitud de los lados de un rectángulo (base b y altura a):
  - En función de una de las diagonales d del rectángulo y la longitud del otro lado:
    - $\mathbf{a = \sqrt{d^2 - b^2}}$ $\qquad$ $\mathbf{b = \sqrt{d^2 - a^2}}$
  - En función del área A del rectángulo y la longitud del otro lado:
    - $\mathbf{a = \frac{A}{b}}$ $\qquad$ $\mathbf{b = \frac{A}{a}}$
  - En función del perímetro P del rectángulo y la longitud de uno de los lados:
    - $\mathbf{a = \frac{P - 2b}{2}}$ $\qquad$ $\mathbf{b = \frac{P - 2a}{2}}$
  - En función de la diagonal d del rectángulo y la longitud del ángulo α:
    - $\mathbf{a = d.\sin\alpha}$ $\qquad$ $\mathbf{b = d.\cos\alpha}$
  - En función de la diagonal d del rectángulo y la longitud del ángulo β:
    - $\mathbf{a = d.\sin\frac{\beta}{2}}$ $\qquad$ $\mathbf{b = d.\cos\frac{\beta}{2}}$

Diagonal de un rectángulo:

- Fórmulas para hallar la longitud de la diagonal d de un rectángulo:
  - En función de la base b y la altura a del rectángulo: $\mathbf{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$
  - En función del área A del rectángulo y la longitud de uno de los lados:
    - $\mathbf{d = \frac{\sqrt{A^2 + a^4}}{a}}$ $\qquad$ $\mathbf{d = \frac{\sqrt{A^2 + b^4}}{b}}$
  - En función del perímetro P del rectángulo y la longitud de uno de los lados:
    - $\mathbf{d = \frac{\sqrt{P^2 - 4.P.a + 8.a^2}}{2}}$ $\qquad$ $\mathbf{d = \frac{\sqrt{P^2 - 4.P.b + 8.b^2}}{2}}$

- En función del radio R de la circunferencia circunscrita: $\mathbf{d = 2.R}$
- En función del diámetro D_0 de la circunferencia circunscrita: $\mathbf{d = D_0}$
- En función del seno del ángulo adyacente a la diagonal y la longitud del lado opuesto a ese ángulo:
  - $\mathbf{d} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin \alpha}}$
- En función del coseno del ángulo adyacente a la diagonal y la longitud del lado adyacente a ese ángulo:
  - $\mathbf{d} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{\cos \alpha}}$
- En función del seno del ángulo entre las diagonales y el área A de un rectángulo: $\mathbf{d} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{2.A}}{\mathbf{\sin \beta}}}$

Perímetro de un rectángulo:

Fórmulas del perímetro P de un rectángulo:

- En función de la longitud de la base b y la altura a del rectángulo: $\mathbf{P = 2.b + 2.a = 2.(b + a).}$
- En función del área A del rectángulo y la longitud de uno de los lados:
  - $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{2.A + 2.a^2}}{\mathbf{a}}$ $\qquad$ $\mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{2.A + 2.b^2}}{\mathbf{b}}$
- En función de la diagonal d y la longitud de uno de los lados:
  - $\mathbf{P = 2.(a + \sqrt{d^2 - a^2})}$ $\qquad$ $\mathbf{P = 2.(b + \sqrt{d^2 - b^2})}$
- En función del radio R de la circunferencia circunscrita y la longitud de uno de los lados:
  - $\mathbf{P = 2.(a + \sqrt{4.R^2 - a^2})}$ $\qquad$ $\mathbf{P = 2.(b + \sqrt{4.R^2 - b^2})}$
- En función del diámetro D_0 de la circunferencia circunscrita y la longitud de uno de los lados:
  - $\mathbf{P = 2.\left(a + \sqrt{{D_0}^2 - a^2}\right)}$ $\qquad$ $\mathbf{P = 2.\left(b + \sqrt{{D_0}^2 - b^2}\right)}$

Área de un rectángulo:

Fórmulas del área A de un rectángulo:

- En función de la longitud de la base b y la altura a del rectángulo: $\mathbf{A = b.a}$
- En función del perímetro P del rectángulo y la longitud de uno de los lados:
  - $\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{P.a - 2.a^2}}{\mathbf{2}}$ $\qquad$ $\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{P.b - 2.b^2}}{\mathbf{2}}$
- En función de la diagonal d del rectángulo y la longitud de uno de los lados:
  - $\mathbf{A = a.\sqrt{d^2 - a^2}}$ $\qquad$ $\mathbf{A = b.\sqrt{d^2 - b^2}}$
- En función de la diagonal d del rectángulo y el seno del ángulo agudo entre las diagonales: $\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{d^2.\sin \beta}}{\mathbf{2}}$
- En función del radio R de la circunferencia circunscrita y la longitud de uno de los lados:
  - $\mathbf{A = a.\sqrt{4R^2 - a^2}}$ $\qquad$ $\mathbf{A = b.\sqrt{4R^2 - b^2}}$
- En función del diámetro D_0 de la circunferencia circunscrita y la longitud de uno de los lados:
  - $\mathbf{A = a.\sqrt{{D_0}^2 - a^2}}$ $\qquad$ $\mathbf{A = a.\sqrt{{D_0}^2 - b^2}}$

Circunferencia circunscrita en un rectángulo: Se llama circunferencia circunscrita a un cuadrado a la circunferencia que pasa por los cuatro vértices del rectángulo y tiene su centro en la intersección de las diagonales del rectángulo.

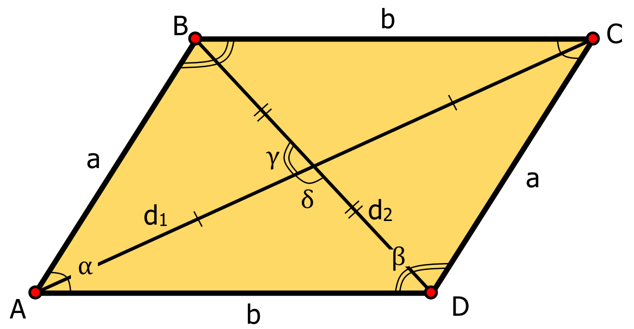
- Fórmulas para hallar el radio R de una circunferencia circunscrita alrededor de un rectángulo:
  - En función de la longitud de la base b y la altura a del rectángulo: $\mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\mathbf{2}}$
  - En función del perímetro P del rectángulo y la longitud de uno de los lados:
    - $\mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{\sqrt{P^2 - 4.P.a + 8.a^2}}}{\mathbf{4}}$ $\qquad$ $\mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{\sqrt{P^2 - 4.P.b + 8.b^2}}}{\mathbf{4}}$

- En función del área A del rectángulo y la longitud de uno de los lados:
    - $\mathbf{R} = \frac{\sqrt{A^2 + a^4}}{2.a}$ $\qquad$ $\mathbf{R} = \frac{\sqrt{A^2 + b^4}}{2.b}$
- En función de la diagonal d del rectángulo: $\mathbf{R} = \frac{d}{2}$
- En función del diámetro D_0 de la circunferencia circunscrita: $\mathbf{R} = \frac{D_0}{2}$
- En función del seno del ángulo adyacente a la diagonal y la longitud del lado opuesto a este ángulo:
    - $\mathbf{R} = \frac{a}{2.\sin\alpha}$
- En función del coseno del ángulo adyacente a la diagonal y la longitud del lado adyacente a este ángulo:
    - $\mathbf{R} = \frac{b}{2.\cos\alpha}$
- En función del seno del ángulo agudo entre las diagonales y el área del rectángulo: $\mathbf{R} = \frac{\sqrt{2A : \sin\beta}}{2}$

Ángulo α entre la base b y la diagonal d del rectángulo:
Fórmulas para hallar el ángulo entre la base y la diagonal:
- En función de la diagonal d del rectángulo y la longitud de uno de los lados:
    - $\sin \propto = \frac{a}{d}$
    - $\cos \propto = \frac{b}{d}$
- En función de la amplitud del ángulo β entre las diagonales:
    - $\propto = \frac{\beta}{2}$

Ángulo β entre las diagonales del rectángulo:
Fórmulas para hallar el ángulo entre las diagonales:
- En función del ángulo ∝ entre la base b y la diagonal d:
    - $\beta = 2.\propto$
- En función del área A del rectángulo y la diagonal d:
    - $\sin\beta = \frac{2.A}{d^2}$

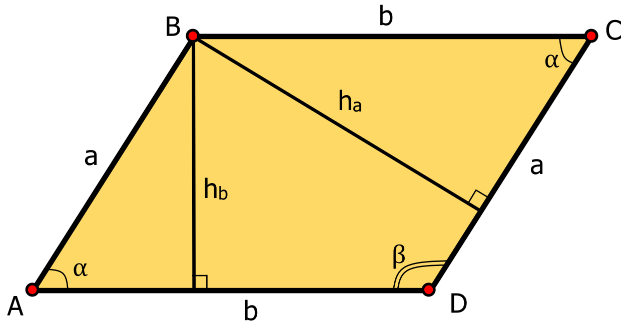
Paralelogramo



- Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos: **AB ∥ CD, BC ∥ AD.**
- Los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma longitud, o sea, son iguales:
- **AB = CD, BC = AD.**
- Los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales:
  $\mathbf{A\hat{B}C = C\hat{D}A}$ **y** $\mathbf{B\hat{C}D = D\hat{A}B}$**.**
- La suma de los ángulos adyacentes a cualquiera de los lados es 180°:
  $\mathbf{A\hat{B}C + B\hat{C}D = 180°}$. $\qquad$ $\mathbf{B\hat{C}D + C\hat{D}A = 180°}$.
  $\mathbf{C\hat{D}A + D\hat{A}B = 180°}$. $\qquad$ $\mathbf{D\hat{A}B + A\hat{B}C = 180°}$.
- La suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es igual a 360°.
- Las bisectrices de los ángulos opuestos de un paralelogramo siempre son paralelas.
- Las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo siempre son perpendiculares.
- Diagonales:
    - Son oblicuas.
    - Se cortan en su punto medio: AO = OC; BO = OD.
    - Cada diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos iguales.
    - El punto de intersección de las diagonales se llama centro de simetría del paralelogramo.
    - La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrado de sus lados: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$. También se puede escribir: $AC^2 + BD^2 = 2.AB^2 + 2.BC^2$

Lados del paralelogramo:

- Fórmulas para hallar la longitud de los lados de un paralelogramo (b y a):
  - En función de las diagonales d_1 y d_2 y el ángulo entre ellas:
    - **a =** $\frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2.d_1.d_2.\cos\gamma}}{2}$ **a =** $\frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2.d_1.d_2.\cos\delta}}{2}$
    - **b =** $\frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2.d_1.d_2.\cos\gamma}}{2}$ **b =** $\frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2.d_1.d_2.\cos\delta}}{2}$
  - En función de las diagonales d_1 y d_2 y el otro lado:
    - **a =** $\frac{\sqrt{2.d_1^2 + 2.d_2^2 - 4.b^2}}{2}$
    - **b =** $\frac{\sqrt{2.d_1^2 + 2.d_2^2 - 4.a^2}}{2}$



  - En función de la altura y el seno del ángulo α:
    - **a =** $\frac{h_b}{\text{sen}\,\alpha}$ **b =** $\frac{h_a}{\text{sen}\,\alpha}$
  - En función del área A y la altura:
    - **a =** $\frac{A}{h_a}$ **b =** $\frac{A}{h_b}$

Diagonales del paralelogramo:

- Fórmulas para hallar la longitud de las diagonales d_1 y d_2 de un paralelogramo:
  - En función de la longitud de los lados y el coseno de los ángulos β y α:
    - **d_1 =** $\sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\beta}$ **d_1 =** $\sqrt{a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha}$
    - **d_2 =** $\sqrt{a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\beta}$ **d_2 =** $\sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\alpha}$
  - En función de la longitud de los lados y de la otra diagonal:
    - **d_1 =** $\sqrt{2.a^2 + 2.b^2 - d_2^2}$ **d_2 =** $\sqrt{2.a^2 + 2.b^2 - d_1^2}$
  - En función de la longitud del área A, la longitud de la otra diagonal y el ángulo entre las diagonales:
    - **d_1 =** $\frac{2.A}{d_2\,.\,\text{sen}\,\gamma}$ **d_1 =** $\frac{2.A}{d_2\,.\,\text{sen}\,\delta}$
    - **d_2 =** $\frac{2.A}{d_1\,.\,\text{sen}\,\gamma}$ **d_2 =** $\frac{2.A}{d_1\,.\,\text{sen}\,\delta}$

Perímetro del paralelogramo:

Fórmulas del perímetro P de un paralelogramo:

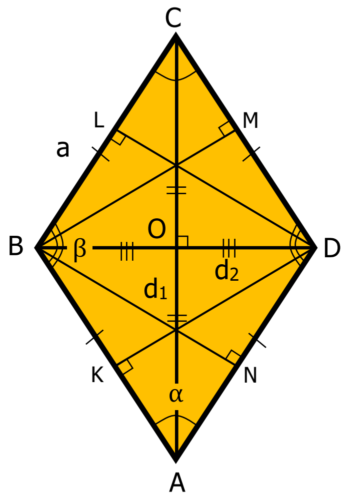
- En función de la longitud de los lados a y b del paralelogramo: **P = 2.b + 2.a = 2.(b + a).**
- En función de la longitud de uno de los lados y de las dos diagonales:
  - **P = 2.a +** $\sqrt{2.d_1^2 + 2.d_2^2 - 4.a^2}$
  - **P = 2.b +** $\sqrt{2.d_1^2 + 2.d_2^2 - 4.b^2}$
- En función de la longitud de un lado, la altura y el seno del ángulo α:
  - **P = 2.**$\left(b + \frac{h_b}{\text{sen}\,\alpha}\right)$ **P = 2.**$\left(a + \frac{h_a}{\text{sen}\,\alpha}\right)$

Área del paralelogramo:

Fórmulas del área A de un paralelogramo:

- En función de la longitud de un lado y de la altura:
  - $\mathbf{A = a \, . \, h_a}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{A = b \, . \, h_b}$
- En función de la longitud de los lados y el seno del ángulo entre ellos:
  - $\mathbf{A = a.b. \text{ sen } \alpha}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{A = a.b. \text{ sen } \beta}$
- En función de las diagonales y el seno del ángulo entre ellas:
  - $\mathbf{A = \frac{1}{2}.d_1.d_2. \text{ sen } \gamma}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{A = \frac{1}{2}.d_1.d_2. \text{ sen } \delta}$

Rombo



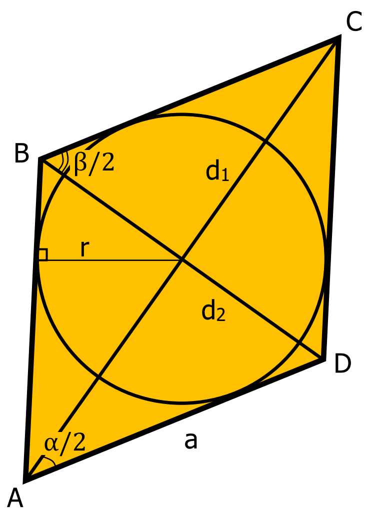
- Un paralelogramo ABCD es un **rombo** si se cumple al menos una de estas condiciones:
  - Dos lados adyacentes son iguales (de esto se deduce que todos los lados son iguales): **AB = BC = CD = DA.**
  - Sus diagonales se cruzan bajo un ángulo recto: **AC ⊥ BD.**
  - Cada una de las diagonales es bisectriz, o sea, divide los ángulos que la contienen por la mitad: $\mathbf{B\hat{A}C = C\hat{A}D,\ B\hat{D}A = B\hat{D}C}$.
  - Todas las alturas son iguales: **BN = DL = BM = DK.**
  - Es posible inscribir un círculo en el paralelogramo.
  - Las diagonales dividen al paralelogramo en cuatro triángulos iguales.

Propiedades del rombo:

- Posee todas las características de un paralelogramo.
- Las diagonales son perpendiculares: **AC ⊥ BD**.
- Las diagonales son bisectrices de sus ángulos.
- La suma de los cuadrados de las diagonales es igual al cuadrado de un lado multiplicado por cuatro:

$$\mathbf{AC^2 + BD^2 = 4.AB^2.}$$

- El punto de intersección de las diagonales se llama centro de simetría del rombo.
- En cualquier rombo se puede inscribir una circunferencia.
- El centro de la circunferencia inscrita en un rombo será el punto de intersección de sus diagonales.



Lado del rombo:

- Fórmulas para hallar la longitud del lado a de un rombo:
  - En función del área A y la altura BN:
    - $\mathbf{a = \frac{A}{BN}}$
  - En función del área A y el seno de sus ángulos:
    - $\mathbf{a = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\text{sen } \alpha}}}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{a = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\text{sen } \beta}}}$
  - En función del área A y el radio de la circunferencia inscrita:
    - $\mathbf{a = \frac{A}{2.r}}$

- En función de las diagonales d_1 y d_2:
  - $a = \frac{\sqrt{{d_1}^2 + {d_2}^2}}{2}$
- En función de las diagonales d_1 y d_2 y el coseno del ángulo agudo (α) o el coseno del ángulo obtuso (β):
  - $a = \frac{d_1}{\sqrt{2 + 2.\cos\alpha}}$ $\qquad a = \frac{d_2}{\sqrt{2 - 2.\cos\beta}}$
- En función de la diagonal mayor d_1 y el ángulo mitad:
  - $a = \frac{d_1}{2.\cos(\alpha/2)}$ $\qquad a = \frac{d_1}{2.\mathrm{sen}(\beta/2)}$
- En función de la diagonal menor d_2 y el ángulo mitad:
  - $a = \frac{d_2}{2.\cos(\beta/2)}$ $\qquad a = \frac{d_2}{2.\mathrm{sen}(\alpha/2)}$
- En función del perímetro P:
  - $a = \frac{P}{4}$

Diagonales del rombo:

- Fórmulas para hallar la longitud de las diagonales d_1 y d_2 del rombo:
  - En función de la longitud del lado y el coseno del ángulo agudo (α) o del ángulo obtuso (β):
    - $d_1 = a.\sqrt{2 + 2.\cos\alpha}$ $\qquad d_1 = a.\sqrt{2 - 2.\cos\beta}$
    - $d_2 = a.\sqrt{2 + 2.\cos\beta}$ $\qquad d_2 = a.\sqrt{2 - 2.\cos\alpha}$
  - En función de la longitud del lado y el ángulo mitad:
    - $d_1 = 2.a.\cos(\alpha/2)$ $\qquad d_1 = 2.a.\mathrm{sen}(\beta/2)$
    - $d_2 = 2.a.\mathrm{sen}(\alpha/2)$ $\qquad d_2 = 2.a.\cos(\beta/2)$
  - En función de la longitud del lado y de la longitud de la otra diagonal:
    - $d_1 = \sqrt{4a^2 - {d_2}^2}$ $\qquad d_2 = \sqrt{4a^2 - {d_1}^2}$
  - En función de la tangente del ángulo agudo (α) o del ángulo obtuso (β) y la longitud de la otra diagonal:
    - $d_1 = d_2 \,.\, \mathrm{tg}(\beta/2)$ $\qquad d_2 = d_1 \,.\, \mathrm{tg}(\alpha/2)$
  - En función del área A y la longitud de la otra diagonal:
    - $d_1 = \frac{2.A}{d_2}$ $\qquad d_2 = \frac{2.A}{d_1}$
  - En función del seno del ángulo mitad y el radio de la circunferencia inscrita:
    - $d_1 = \frac{2.r}{\mathrm{sen}(\alpha/2)}$ $\qquad d_2 = \frac{2.r}{\mathrm{sen}(\beta/2)}$

Perímetro del rombo:

Fórmula del perímetro P de un rombo:

- En función de la longitud del lado a: **P = 4.a.**

Área del rombo:

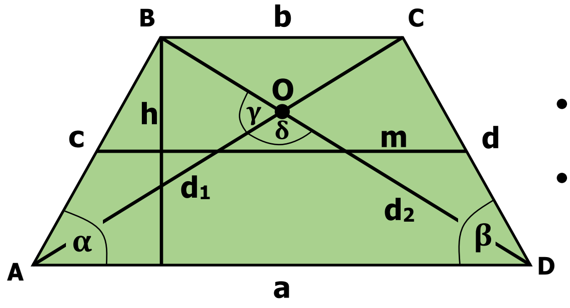
Fórmulas del área A de un rombo:

- En función de la longitud del lado y de la altura BN:
  - **A = a . BN**
- En función de la longitud del lado y el seno de cualquier ángulo:
  - $\mathbf{A = a^2 . sen\ \alpha}$ $\mathbf{A = a^2 . sen\ \beta}$
- En función de la longitud del lado y el radio de la circunferencia inscrita:
  - **A = 2.a.r**
- En función de la longitud de las dos diagonales d_1 y d_2:
  - $\mathbf{A = \frac{d_1 . d_2}{2}}$
- En función del seno de cualquier ángulo y el radio de la circunferencia inscrita.
  - $\mathbf{A = \frac{4 . r^2}{sen\ \alpha}}$ $\mathbf{A = \frac{4 . r^2}{sen\ \beta}}$
- En función de la longitud de las diagonales d_1 y d_2 y la tangente de los ángulos α y β.
  - $\mathbf{A = \frac{1}{2} . {d_1}^2 . tg\ (\alpha/2)}$ $\mathbf{A = \frac{1}{2} . {d_2}^2 . tg\ (\beta/2)}$

Circunferencia inscrita en un rombo: Se llama circunferencia inscrita en un rombo a la circunferencia adyacente a todos los lados del rombo y cuyo centro está en la intersección de las diagonales del rombo.

- Fórmulas para hallar el radio r de una circunferencia inscrita en un rombo:
  - En función de la altura BN del rombo: $\mathbf{r = \frac{h}{2}}$
  - En función del área A y un lado a del rombo: $\mathbf{r = \frac{A}{2.a}}$
  - En función del área A y el seno del ángulo α del rombo: $\mathbf{r = \frac{\sqrt{A . sen\ \alpha}}{2}}$
  - En función del lado a y el seno de cualquier ángulo:
    - $\mathbf{r = \frac{a . sen\ \alpha}{2}}$ $\mathbf{r = \frac{a . sen\ \beta}{2}}$
  - En función de las diagonales d_1 y d_2 y el seno de los ángulos α y β:
    - $\mathbf{r = \frac{d_1 . sen\ (\alpha/2)}{2}}$ $\mathbf{r = \frac{d_2 . sen\ (\beta/2)}{2}}$
  - En función de las diagonales d_1 y d_2: $\mathbf{r = \frac{d_1 . d_2}{2.\sqrt{{d_1}^2 + {d_2}^2}}}$
  - En función de las dos diagonales d_1 y d_2 y el lado a: $\mathbf{r = \frac{d_1 . d_2}{4.a}}$

Trapecio



a = AD = Base mayor

b = BC = Base menor

c = AB = Lado lateral 1

d = CD = Lado lateral 2

h = Altura

m = Base media o mediana

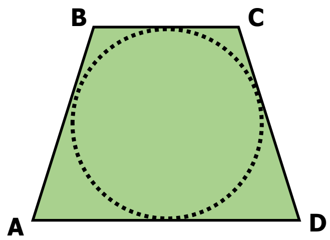
d_1 = AC = Diagonal 1

d_2 = BD = Diagonal 2

O = Intersección de las diagonales

- Se llama **trapecio** a un cuadrilátero convexo que tiene dos lados paralelos y los otros dos lados no son paralelos. Los lados paralelos se llaman *bases* del trapecio y a los otros dos, lados *laterales*.
- La distancia del segmento perpendicular entre las bases, se denomina *altura*.
- Se llama *mediana* al segmento que tiene por extremos los puntos medios de los lados no paralelos.

Propiedades:



- Se puede inscribir una circunferencia en el trapecio si la suma de las longitudes de las bases equivale a la suma de las longitudes de los lados laterales: **AD + BC = AB + CD.**
- El radio de la circunferencia inscrita se puede calcular mediante la siguiente fórmula: **r = h/2.**
- Cada diagonal en el punto de intersección O se divide en dos partes con tal correlación de la longitud como la de entre las bases: $\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO} = \frac{OB}{DO}$.
- Las diagonales del trapecio d_1 y d_2 están relacionadas con los lados mediante la correlación de:

$$d_1^{\,2} + d_2^{\,2} = 2ab + c^2 + d^2$$

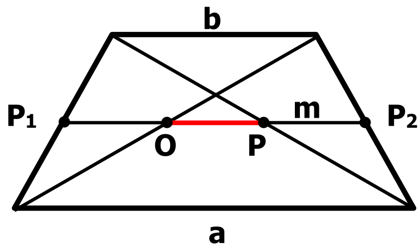
Área del trapecio:	$A = \frac{(a+b).h}{2}$ Donde a y b son las bases y h la altura.	$A = m.h$ de donde se desprende que $m = \frac{A}{h}$ Donde m es la base media y h la altura.
Se puede calcular el área si sólo se conocen las medidas de los cuatro lados mediante la siguiente fórmula: $A = \frac{a+b}{4.(a-b)}.\sqrt{(-a+c+b+d)(-a+c+b+d)(-a-c+b-d)(a-c-b+d)}$ Donde a es la base mayor, b es la base menor, y c y d son los lados laterales.		

Base media o mediana (m) del trapecio: Es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos (laterales). La base media es paralela a las bases y su medida es el promedio de las longitudes de las bases.

$$m = \frac{(a+b)}{2}$$

La base media (m) de un trapecio biseca a las diagonales, esto quiere decir que las corta en sus puntos medios. A su vez, el segmento que une los puntos medios de las diagonales es paralelo a las bases y su medida es la mitad de la diferencia de las longitudes de las bases:

$$\overline{OP} = \frac{(a-b)}{2}$$



P_1 y P_2 son los puntos medios de los lados laterales.
O y P son los puntos medios de las diagonales.
$\overline{OP} \parallel a \parallel b$

Lados del trapecio:

- Fórmulas para hallar la longitud de las bases del trapecio a través de la mediana m y la otra base:
  - **a = 2.m – b** **b = 2.m – a**
- Fórmulas para hallar la longitud de las bases del trapecio a través de la altura y los ángulos adyacentes a la base mayor:
  - $\mathbf{a = b + h.(ctg \propto + ctg\ \beta)}$ $\mathbf{b = a - h.(ctg \propto + ctg\ \beta)}$

Aclaración: $ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$ y $ctg\ \beta = \frac{1}{tg\ \beta}$

- Fórmulas para hallar la longitud de las bases del trapecio a través de los lados laterales y los ángulos adyacentes a la base mayor:
  - $\mathbf{a = b + c.\cos\propto + d.\cos\beta}$ $\qquad$ $\mathbf{b = a - c.\cos\propto - d.\cos\beta}$
- Fórmulas para hallar la longitud de los lados laterales del trapecio a través de la altura y los ángulos adyacentes a la base mayor:
  - $\mathbf{c = \dfrac{h}{sen\propto}}$ $\qquad$ $\mathbf{d = \dfrac{h}{sen\,\beta}}$

Altura del trapecio:

- Fórmulas para hallar la longitud de la altura de un trapecio:
  - En función de un lado lateral y el ángulo adyacente al lado de la base:
    - $\mathbf{h = c.\,sen\propto}$ $\qquad$ $\mathbf{h = d.\,sen\,\beta}$
  - En función las bases, las diagonales y los ángulos entre ellas:
    - $\mathbf{h = sen\,\gamma.\dfrac{d_1\,.\,d_2}{a+b}}$ $\qquad$ $\mathbf{h = sen\,\delta.\dfrac{d_1\,.\,d_2}{a+b}}$
  - En función de las diagonales, los ángulos entre ellas y la mediana:
    - $\mathbf{h = sen\,\gamma.\dfrac{d_1\,.\,d_2}{2.M}}$ $\qquad$ $\mathbf{h = sen\,\delta.\dfrac{d_1\,.\,d_2}{2.M}}$
  - En función del área A y las longitudes de sus bases: $\mathbf{h = \dfrac{2.A}{a+b}}$
  - En función del área A y la longitud de la mediana m : $\mathbf{h = \dfrac{A}{m}}$
  - En función de las dos bases (a y b) y de los dos lados laterales (c y d):

$$\mathbf{h = \frac{\sqrt{4.(a-b)^2.\,c^2 - [c^2 + (a-b)^2 - d^2]^2}}{2.(a-b)}}$$

Diagonales del trapecio:

- Fórmulas para hallar las longitudes de las diagonales d_1 y d_2 de un trapecio:
  - Utilizando el teorema del coseno:
    - $\mathbf{d_1 = \sqrt{a^2 + d^2 - 2.a.d.\cos\beta}}$ $\qquad$ $\mathbf{d_2 = \sqrt{a^2 + c^2 + 2.a.c.\cos\beta}}$
  - En función de la longitud de los cuatro lados:
    - $\mathbf{d_1 = \sqrt{d^2 + a.b - \dfrac{a.(d^2 - c^2)}{a-b}}}$ $\qquad$ $\mathbf{d_2 = \sqrt{c^2 + a.b - \dfrac{a.(c^2 - d^2)}{a-b}}}$
  - En función de la altura, la longitud de la otra diagonal y los ángulos adyacentes a la base mayor:
    - $\mathbf{d_1 = \sqrt{h^2 + (a - h.ctg\,\beta)^2}}$ $\qquad$ $\mathbf{d_1 = \sqrt{h^2 + (b + h.ctg\propto)^2}}$
    - $\mathbf{d_2 = \sqrt{h^2 + (a - h.ctg\propto)^2}}$ $\qquad$ $\mathbf{d_2 = \sqrt{h^2 + (b + h.ctg\,\beta)^2}}$
  - En función de la longitud de los cuatro lados y la otra diagonal:
    - $\mathbf{d_1 = \sqrt{c^2 + d^2 + 2ab - {d_2}^2}}$ $\qquad$ $\mathbf{d_2 = \sqrt{c^2 + d^2 + 2ab - {d_1}^2}}$

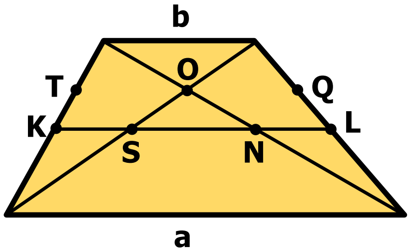
Área del trapecio:

Fórmulas del área A del trapecio:

- En función de las longitudes de las bases y de la altura: $\mathbf{A} = \frac{(a+b).h}{2}$
- En función de las longitudes de la mediana m y de la altura: $\mathbf{A = m.h}$
- En función de la longitud de las dos diagonales d_1 y d_2 y los ángulos entre ellas:
  - $\mathbf{A} = \frac{d_1 \,.\, d_2}{2}$ **. sen** γ $\qquad$ $\mathbf{A} = \frac{d_1 \,.\, d_2}{2}$ **. sen** δ
- En función de la longitud de los cuatro lados:
  - $\mathbf{A} = \frac{a+b}{2} . \sqrt{c^2 - \left(\frac{(a-b)^2 + c^2 - d^2}{2.(a-b)}\right)^2}$
- Fórmula de Herón para el trapecio:
  - $\mathbf{A} = \frac{a+b}{|a-b|} . \sqrt{(s-a).(s-b).(s-a-c).(s-a-d)}$

Donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ (semiperímetro del trapecio)

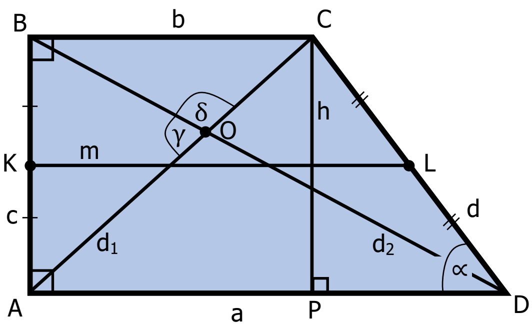
Otros segmentos del trapecio escaleno



Fórmulas para hallar las longitudes de los segmentos que pasan por el trapecio:

- $\mathbf{KS = NL} = \frac{b}{2}$
- $\mathbf{KN = SL} = \frac{a}{2}$
- $\mathbf{TO = OQ} = \frac{a \,.\, b}{a+b}$

Trapecio rectángulo



Un trapecio es rectángulo si se cumple una de las siguientes condiciones:

- Tiene dos ángulos rectos adyacentes:

  $\mathbf{B\hat{A}D = 90°}$ **y** $\mathbf{A\hat{B}C = 90°}$

- Tiene un lado lateral perpendicular a las bases:

  AB ⊥ BC, AB ⊥ AD.

Propiedades básicas del trapecio rectángulo:

Las diagonales son diferentes y no son perpendiculares.

- Tiene dos ángulos rectos adyacentes:

  $\mathbf{B\hat{A}D = 90°}$ **y** $\mathbf{A\hat{B}C = 90°}$

- Tiene un lado lateral perpendicular a las bases:

  AB ⊥ BC, AB ⊥ AD.

- La altura equivale al lado lateral menor:

  h = AB.

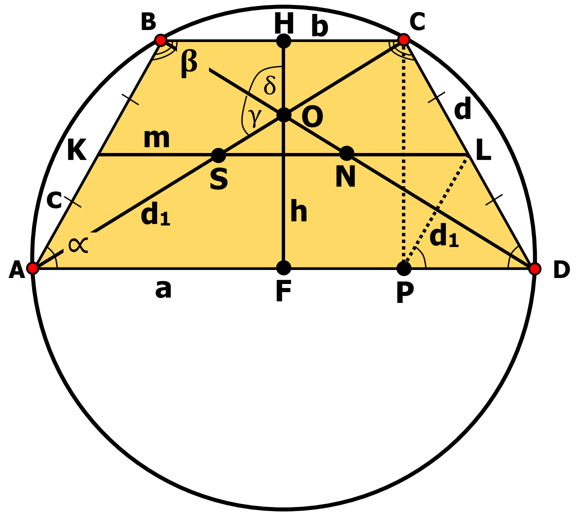
Lados del trapecio rectángulo:

- Fórmulas para hallar la longitud de las bases del trapecio rectángulo a través de los otros lados y el ángulo α:
  - $\mathbf{a = b + d.\cos\alpha}$ $\quad$ $\mathbf{b = a - d.\cos\alpha}$
  - $\mathbf{a = b + c.ctg\,\alpha}$ $\quad$ $\mathbf{b = a - c.ctg\,\alpha}$ $\quad$ Aclaración: $ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$
  - $\mathbf{a = b + \sqrt{d^2 - c^2}}$ $\quad$ $\mathbf{b = a - \sqrt{d^2 - c^2}}$
- Fórmulas para hallar la longitud de las bases del trapecio rectángulo a través de los lados, las diagonales y los ángulos entre ellas:
  - $\mathbf{a = \frac{d_1.d_2}{c}\,.\,sen\,\gamma - b}$ $\quad$ $\mathbf{b = \frac{d_1.d_2}{c}\,.\,sen\,\gamma - a}$
  - $\mathbf{a = \frac{d_1.d_2}{c}\,.\,sen\,\delta - b}$ $\quad$ $\mathbf{b = \frac{d_1.d_2}{c}\,.\,sen\,\delta - a}$
- Fórmulas para hallar la longitud de las bases del trapecio rectángulo a través del área y los otros lados:
  - $\mathbf{a = \frac{2.A}{c} - b}$ $\quad$ $\mathbf{b = \frac{2.A}{c} - a}$
- Fórmulas para hallar la longitud del lado lateral c del trapecio rectángulo a través de los otros lados y el ángulo α:
  - $\mathbf{c = \sqrt{d^2 - (a-b)^2}}$
  - $\mathbf{c = (a - b).tg\,\alpha}$
  - $\mathbf{c = d.sen\,\alpha}$
- Fórmulas para hallar la longitud del lado lateral c del trapecio rectángulo a través de las bases, las diagonales y el ángulo entre ellas:
  - $\mathbf{c = \frac{d_1.d_2}{a+b}.\,sen\,\gamma}$ $\quad$ $\mathbf{c = \frac{d_1.d_2}{a+b}.\,sen\,\delta}$
- Fórmulas para hallar la longitud de los lados laterales c y d del trapecio rectángulo a través de las bases a y b, la mediana m, el área A y el ángulo α:
  - $\mathbf{c = \frac{A}{m}}$ $\quad$ $\mathbf{d = \frac{A}{m.sen\,\alpha}}$
  - $\mathbf{c = \frac{2.A}{a+b}}$ $\quad$ $\mathbf{d = \frac{2.A}{(a+b).sen\,\alpha}}$
- Fórmulas para hallar la longitud del lado lateral d del trapecio rectángulo a través de los otros lados, la altura h y el ángulo α:
  - $\mathbf{d = \frac{a-b}{\cos\propto}}$ $\quad$ $\mathbf{d = \frac{d}{sen\propto}}$
  - $\mathbf{d = \frac{h}{sen\propto}}$ $\quad$ $\mathbf{d = \sqrt{c^2 + (a-b)^2}}$

Mediana del trapecio rectángulo:

- Fórmulas para hallar la longitud de la mediana m de un trapecio rectángulo:
  - En función de la base, la altura (equivalente al lado d) y el ángulo $\propto$:
    - $\mathbf{m = a - h.\frac{ctg\propto}{2}}$ $\quad$ $\mathbf{m = b + h.\frac{ctg\propto}{2}}$
  - En función las bases y los lados laterales:
    - $\mathbf{m = a - \frac{\sqrt{d^2 - c^2}}{2}}$ $\quad$ $\mathbf{m = b + \frac{\sqrt{d^2 - c^2}}{2}}$

Trapecio isósceles



Para que un trapecio sea isósceles es necesario y suficiente que se cumpla una de estas condiciones:

- Los ángulos adyacentes a las bases sean iguales:
  $\mathbf{A\hat{B}C = B\hat{C}D}$ **y** $\mathbf{B\hat{A}D = A\hat{D}C}$
- Las diagonales son congruentes (iguales): **AC = BD**
- Los ángulos son iguales entre las diagonales y las bases:
  $\mathbf{A\hat{B}D = A\hat{C}D;\ D\hat{B}C = A\hat{C}B;\ C\hat{A}D = A\hat{D}B}$ **y** $\mathbf{B\hat{A}C = B\hat{D}C}$
- La suma de los ángulos opuestos es igual a 180°.
  $\mathbf{A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180°}$ **y** $\mathbf{B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180°.}$
- Alrededor del trapecio se puede circunscribir una circunferencia.

Propiedades básicas del trapecio isósceles:

- La suma de los ángulos adyacentes al lado lateral de un trapecio isósceles es igual a 180º.
  $\mathbf{A\hat{B}C + B\hat{A}D = 180°}$ **y** $\mathbf{A\hat{D}C + B\hat{C}D = 180°.}$
- Alrededor del trapecio isósceles se puede circunscribir una circunferencia.
- Si se puede inscribir una circunferencia en el trapecio isósceles entonces el lado lateral equivale a la mediana del trapecio: **AB = AC = m.**
- Todo trapecio isósceles se puede descomponer en dos trapecios rectángulos iguales, mediante un segmento que une los puntos medios de las bases. La recta que contiene al segmento es eje de simetría de las figuras resultantes.
- Si las diagonales son perpendiculares entre sí entonces la altura equivale a la semisuma de las bases (o sea, equivale a la mediana m): **h = m.**
- Si las diagonales son perpendiculares entre sí entonces el área del trapecio equivale al cuadrado de la altura:

$$\textbf{Área (ABCD)} = \mathbf{h^2.}$$

- Si se puede inscribir una circunferencia en el trapecio isósceles entonces el cuadrado de la altura equivale al producto de las bases del trapecio: $\mathbf{h^2 = BC\ .\ AD}$
- Suma de los cuadrados de las diagonales equivale a la suma de los cuadrados de los lados laterales más el producto doble de las bases del trapecio: $\mathbf{AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2.BC.AD.}$
- La altura (CP) trazada por el vértice (C) sobre la base mayor (AD) la divide en el segmento mayor (AP) que equivale a la semisuma de las bases y en el segmento menor (PD) que equivale a la semiresta de las bases:

$$\mathbf{AP = \frac{BC + AD}{2}} \qquad \mathbf{PD = \frac{AD - BC}{2}}$$

Lados del trapecio isósceles:

- Fórmulas para hallar la longitud de los lados del trapecio isósceles a través de los otros lados, la altura h y el ángulo α:
  - $\mathbf{a = b + 2.h.ctg\ \alpha}$ $\qquad$ $\mathbf{b = a - 2.h.ctg\ \alpha}$ $\qquad$ Aclaración: $\text{ctg} \propto = \frac{1}{\text{tg} \propto}$
  - $\mathbf{a = b + 2.c.cos\ \alpha}$ $\qquad$ $\mathbf{b = a - 2.c.cos\ \alpha}$
  - $\mathbf{c = d = \frac{h}{sen \propto}}$ $\qquad$ $\mathbf{c = d = \frac{a - b}{2.cos \propto}}$

- Fórmulas para hallar la longitud de los lados del trapecio isósceles a través de las diagonales d_1 y los otros lados:
  - $a = \frac{d_1{}^2 - c^2}{b}$ $b = \frac{d_1{}^2 - c^2}{a}$ $c = d = \sqrt{d_1{}^2 - a.b}$
- Fórmulas para hallar la longitud de las bases del trapecio isósceles a través del área A, la altura h y la otra base:
  - $a = \frac{2.A}{h} - b$ $b = \frac{2.A}{h} - a$
- Fórmula para hallar la longitud del lado lateral c = d del trapecio isósceles a través del área A, la mediana m y el ángulo α:
  - $c = d = \frac{A}{m.sen \propto}$
- Fórmula para hallar la longitud del lado lateral c = d del trapecio isósceles a través del área, de las bases a y b y el ángulo α:
  - $c = d = \frac{2.A}{(a+b).sen \propto}$

Mediana (o base media) del trapecio isósceles:

- Fórmulas para hallar la longitud de la mediana m de un trapecio isósceles:
  - En función de las bases a y b, la altura h y el ángulo $\propto$:
    - $m = a - h.ctg \propto$ $m = b + h.ctg \propto$ Aclaración: $ctg \propto = \frac{1}{tg \propto}$
    - $m = a - \sqrt{c^2 - h^2}$ $m = b + \sqrt{c^2 - h^2}$
  - En función del área A, el lado lateral c = d y el ángulo $\propto$:
    - $m = \frac{A}{c.\ sen \propto}$

Altura del trapecio isósceles:

- Fórmulas para hallar la longitud de la altura h de un trapecio isósceles:
  - En función de los lados:
    - $h = \frac{1}{2} . \sqrt{4.c^2 - (a-b)^2}$
  - En función de las bases a y b y el ángulo β:
    - $h = \frac{a-b}{2}. tg\ \beta$
    - $h = c.\ sen\ \beta$

Diagonales del trapecio isósceles: Las diagonales del trapecio isósceles son iguales $d_1 = d_2$.

- Fórmulas para hallar la longitud de la diagonal d_1 de un trapecio isósceles:
  - En función de los lados:
    - $d_1 = \sqrt{c^2 + a.b}$
  - Utilizando el teorema del coseno:
    - $d_1 = \sqrt{a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \propto}$
    - $d_1 = \sqrt{b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \beta}$
  - En función de la altura h y la mediana m:
    - $d_1 = \sqrt{h^2 + m^2}$
  - En función de la altura h y las bases a y b:
    - $d_1 = \frac{1}{2}.\sqrt{4.h^2 + (a+b)^2}$

Área del trapecio isósceles:

Fórmulas para hallar el área A de un trapecio isósceles:

- En función de los lados:
  - $\mathbf{A} = \frac{a+b}{4}.\sqrt{4.c^2 - (a-b)^2}$
- En función de los lados y el ángulo $\propto$:
  - $\mathbf{A = (b + c.cos} \propto \mathbf{).c.sen} \propto$
  - $\mathbf{A = (a - c.cos} \propto \mathbf{).c.sen} \propto$
- En función del radio r de la circunferencia inscrita y los ángulos $\propto$ y β.
  Aclaración: Tener en cuenta que se puede inscribir una circunferencia en un trapecio isósceles cuando sus lados laterales son iguales a su mediana (c = d = m).
  - $\mathbf{A} = \frac{4.r^2}{\text{sen} \propto}$ $\qquad$ $\mathbf{A} = \frac{4.r^2}{\text{sen } \beta}$
- En función de la longitud de las bases y los ángulos $\propto$ y β:
  - $\mathbf{A} = \frac{a.b}{\text{sen} \propto}$ $\qquad$ $\mathbf{A} = \frac{a.b}{\text{sen } \beta}$
- Fórmula para hallar el área de un trapecio isósceles en el cuál se puede inscribir una circunferencia. Siendo r el radio de dicha circunferencia y m la mediana:
  Aclaración: Tener en cuenta que se puede inscribir una circunferencia en un trapecio isósceles cuando sus lados laterales son iguales a su mediana (c = d = m).
  - $\mathbf{A = (a + b).r}$ $\qquad$ $\mathbf{A} = \sqrt{a.b}\ \mathbf{.\ c}$ $\qquad$ $\mathbf{A} = \sqrt{a.b}\ \mathbf{.\ m}$
- En función de la longitud de la diagonal d_1 y los ángulos γ y δ entre ellas:
  - $\mathbf{A} = \frac{{d_1}^2}{2}.\ \text{sen } \gamma$ $\qquad$ $\mathbf{A} = \frac{{d_1}^2}{2}.\ \text{sen } \delta$
- En función de la longitud de la mediana m, el lado lateral c = d y los ángulos $\propto$ y β:
  - $\mathbf{A = m.c.sen} \propto$ $\qquad$ $\mathbf{A = m.c.sen}\ \beta$
- En función de las bases a y b y la altura h:
  - $\mathbf{A} = \frac{a+b}{2}.\ \mathbf{h}$

Circunferencia circunscrita alrededor del trapecio isósceles:

Aclaración: Se puede sólo circunscribir una circunferencia alrededor de un trapecio isósceles.

- Fórmula para hallar el valor del radio R de la circunferencia circunscrita alrededor de un trapecio isósceles en función de los lados y la diagonal d_1:
  - $\mathbf{R} = \frac{a.c.d_1}{4\sqrt{p.(p-a).(p-c).(p-d_1)}}$

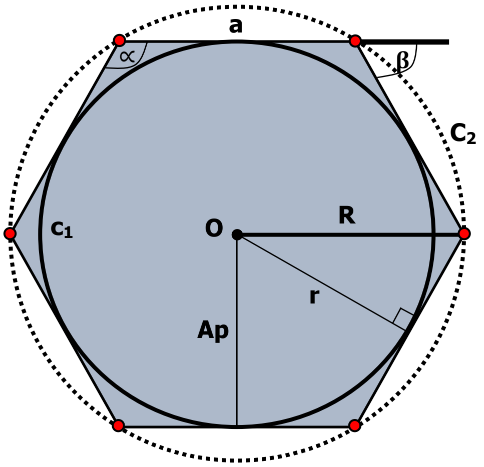
  Donde $p = \frac{a + c + d_1}{2}$

Polígonos Regulares

Fuente: http://es.onlinemschool.com/

Un polígono regular es aquel cuyos lados o ángulos son todos congruentes (iguales) entre sí.
Los polígonos regulares se diferencian por el número de lados y ángulos.

Ejemplo: Hexágono Regular



Referencias:
a = lado del polígono regular (todos los lados son iguales)
$\propto$ = ángulo interior del polígono regular (todos los ángulos interiores son iguales).
β = ángulo exterior del polígono regular (todos los ángulos exteriores son iguales).
c_1 = Circunferencia inscrita en el polígono regular.
C_2 = Circunferencia circunscrita alrededor del polígono regular.
O = Centro del polígono regular. Es también el centro de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.
r = Radio de la circunferencia inscrita (coincide con el valor del apotema del polígono).
R = radio de la circunferencia circunscrita.
Ap = Apotema del polígono regular (Coincide con el radio r de la circunferencia inscrita).

Propiedades esenciales del polígono regular:

- Tiene todos los lados, todos los ángulos interiores y todos los ángulos exteriores iguales.
- El centro O del polígono regular también es el centro de la circunferencia inscrita y el centro de la circunferencia circunscrita.
- La suma de todos los ángulos interiores del polígono de n vértices es:

$$\mathbf{SAI = 180°.\,(n - 2)}$$

- La suma de todos los ángulos exteriores del polígono de n vértices es siempre 360°:

$$\mathbf{SAE = 360°}$$

- El número de diagonales por vértice es: **Diagonales por vértice = n – 3**
- El número de diagonales totales es: **Diagonales totales =** $\frac{\mathbf{n.(n-3)}}{\mathbf{2}}$
- En cualquier polígono regular se puede inscribir una circunferencia y circunscribir una circunferencia. El área del anillo formado entre las dos circunferencias se puede calcular conociendo solamente el valor del lado a del polígono a través de la siguiente fórmula:

$$\textbf{Área del anillo formado entre las circunferencias} = \frac{\pi}{4}\,.\,a^2$$

- Todas las bisectrices de los ángulos interiores son iguales y pasan por el centro O del polígono regular.

Lado del polígono regular:

- Fórmulas para hallar el valor del lado a de un polígono regular de n lados:
  - En función del radio r de la circunferencia inscrita:
    - $\mathbf{a = 2.r.\,tg\,\frac{180°}{n}}$ $\qquad$ $\mathbf{a = 2.r.\,tg\,\frac{\pi}{n}}$
  - En función del radio R de la circunferencia circunscrita:
    - $\mathbf{a = 2.r.\,sen\,\frac{180°}{n}}$ $\qquad$ $\mathbf{a = 2.r.\,sen\,\frac{\pi}{n}}$

Radio de la circunferencia inscrita en el polígono regular:

- Fórmulas para hallar el valor del radio r de la circunferencia inscrita en un polígono regular de n lados en función del valor del lado a del polígono:
    - $\mathbf{r = a:}\left(2.\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}\right)$ $\quad\quad$ $\mathbf{r = a:}\left(2.\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\right)$

Radio de la circunferencia circunscrita alrededor del polígono regular:

- Fórmulas para hallar el valor del radio R de la circunferencia circunscrita alrededor de un polígono regular de n lados en función del valor del lado a del polígono:
    - $\mathbf{R = a:}\left(2.\,\mathrm{sen}\,\frac{180°}{n}\right)$ $\quad\quad$ $\mathbf{R = a:}\left(2.\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\right)$

Perímetro del polígono regular:

- Fórmula para hallar el valor del perímetro P de un polígono regular de n lados en función del valor del lado a:
    - $\mathbf{P = a.n}$

Área del polígono regular:

- Fórmulas para hallar el valor del área A de un polígono regular de n lados:
    - En función del valor del lado a y del apotema Ap del polígono:
        - $\mathbf{A} = \frac{\mathrm{Perímetro}\ .\ \mathrm{Ap}}{2} = \frac{\mathrm{a.n}\ .\ \mathrm{Ap}}{2}$

      (Aclaración, el perímetro es igual a la longitud del lado a multiplicada por la cantidad de lados n).

    - En función del valor del lado a del polígono:
        - $\mathbf{A} = \frac{n.a^2}{4}.\ \mathbf{ctg}\left(\frac{180°}{n}\right)$ $\quad\quad$ Aclaración: $\mathrm{ctg} \propto = \frac{1}{\mathrm{tg} \propto}$

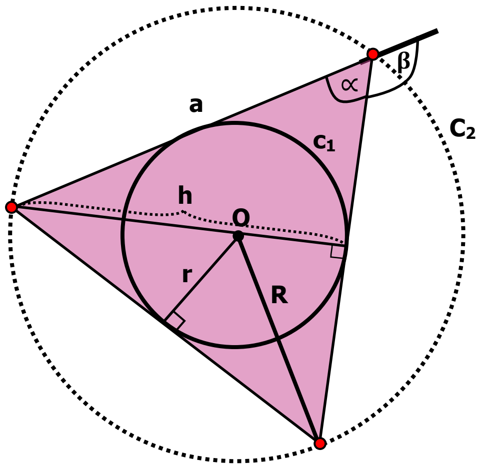
    - En función del radio r de la circunferencia inscrita al polígono regular:
        - $\mathbf{A = n.r^2.\ tg}\left(\frac{180°}{n}\right)$

    - En función del radio R de la circunferencia circunscrita al polígono regular:
        - $\mathbf{A} = \frac{n.R^2}{2}.\ \mathbf{sen}\left(\frac{360°}{n}\right)$

Ángulo interior del polígono regular:

- Fórmula para hallar el valor del ángulo interior $\propto$ de un polígono regular de n lados:
    - $\propto = \frac{180°.(n-2)}{n}$

Triángulo Equilátero



Referencias:

a = lado del triángulo equilátero (todos los lados son iguales)

$\propto$ = ángulo interior del triángulo equilátero (todos los ángulos interiores son iguales, $\propto$ = 60°).

β = ángulo exterior del triángulo equilátero (todos los ángulos exteriores son iguales β = 120°).

h = Altura del triángulo equilátero (las tres alturas son iguales)

c_1 = Circunferencia inscrita en el triángulo equilátero.

C_2 = Circunferencia circunscrita alrededor del triángulo equilátero.

O = Centro del triángulo equilátero. Es también el centro de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.

r = Radio de la circunferencia inscrita.

R = radio de la circunferencia circunscrita.

Fórmulas del triángulo equilátero:

- Fórmula para hallar el valor del lado a del triángulo equilátero en función del valor del radio r de la circunferencia inscrita:

$$\mathbf{a = 2.r.\sqrt{3}}$$

- Fórmula para hallar el valor del lado a del triángulo equilátero en función del valor del radio R de la circunferencia circunscrita:

$$\mathbf{a = R.\sqrt{3}}$$

- Fórmula para hallar el valor de la altura h del triángulo equilátero en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{h = \frac{a.\sqrt{3}}{2}}$$

- Fórmula para hallar el valor del radio r de la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{r = \frac{a.\sqrt{3}}{6}}$$

- Fórmula para hallar el valor del radio R de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo equilátero en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{R = \frac{a.\sqrt{3}}{3}}$$

- Fórmula para hallar el área A del triángulo equilátero en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{A = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}}$$

- Fórmula para hallar el área A del triángulo equilátero en función de la longitud del radio r de la circunferencia inscrita:

$$\mathbf{A = r^2.3.\sqrt{3}}$$

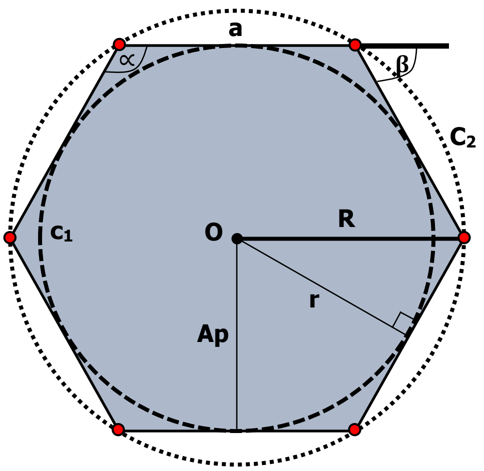
- Fórmula para hallar el área A del triángulo equilátero en función de la longitud del radio R de la circunferencia circunscrita:

$$\mathbf{A = \frac{R^2.3.\sqrt{3}}{4}}$$

- Cada ángulo interior del triángulo equilátero vale 60° y cada ángulo exterior del triángulo equilátero vale 120°.

$$\propto \mathbf{= 60° \text{ y } \beta = 120°}$$

Hexágono Regular



Referencias:

a = lado del hexágono regular (todos los lados son iguales)

∝ = ángulo interior del hexágono regular (todos los ángulos interiores son iguales, ∝ = 120°).

β = ángulo exterior del hexágono regular (todos los ángulos exteriores son iguales β = 60°).

c_1 = Circunferencia inscrita en el hexágono regular.

C_2 = Circunferencia circunscrita alrededor del hexágono regular.

O = Centro del hexágono regular. Es también el centro de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.

r = Radio de la circunferencia inscrita.

R = radio de la circunferencia circunscrita.

Fórmulas del hexágono regular:

- Fórmula para hallar el valor del lado a del hexágono regular en función del valor del radio r de la circunferencia inscrita:

$$\mathbf{a = \frac{2.\sqrt{3}}{3}.r}$$

- Fórmula para hallar el valor del lado a del hexágono regular en función del valor del radio R de la circunferencia circunscrita:

$$\mathbf{a = R}$$

- Fórmula para hallar el valor del radio r de la circunferencia inscrita en el hexágono regular en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{r = \frac{a.\sqrt{3}}{2}}$$

- Fórmula para hallar el valor del radio R de la circunferencia circunscrita alrededor del hexágono regular en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{R = a}$$

- Fórmula para hallar el área A del hexágono regular en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{A = \frac{a^2.3.\sqrt{3}}{2}}$$

- Fórmula para hallar el área A del hexágono regular en función de la longitud del radio r de la circunferencia inscrita:

$$\mathbf{A = r^2.2.\sqrt{3}}$$

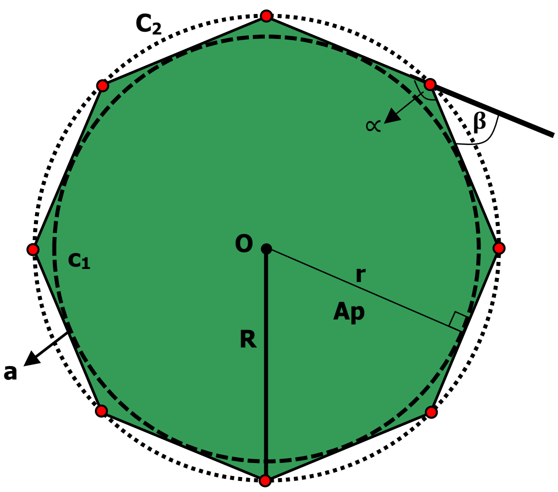
- Fórmula para hallar el área A del hexágono regular en función de la longitud del radio R de la circunferencia circunscrita:

$$\mathbf{A = \frac{R^2.3.\sqrt{3}}{2}}$$

- Cada ángulo interior del hexágono regular vale 120° y cada ángulo exterior del hexágono regular vale 60°.

$$\propto = \mathbf{120° \ y \ \beta = 60°}$$

Octógono regular



Referencias:

a = lado del octógono regular (todos los lados son iguales)

∝ = ángulo interior del octógono regular (todos los ángulos interiores son iguales, ∝ = 135°).

β = ángulo exterior del octógono regular (todos los ángulos exteriores son iguales β = 45°).

c_1 = Circunferencia inscrita en el octógono regular.

C_2 = Circunferencia circunscrita alrededor del octógono regular.

O = Centro del octógono regular. Es también el centro de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.

r = Radio de la circunferencia inscrita (coincide con la apotema).

Ap = apotema del octógono regular (coincide con el radio de la circunferencia inscrita).

R = radio de la circunferencia circunscrita.

Fórmulas del octógono regular:

- Fórmula para hallar el valor del lado a del octógono regular en función del valor del radio r de la circunferencia inscrita:

$$\mathbf{a = 2.r.(\sqrt{2} - 1)}$$

- Fórmula para hallar el valor del lado a del octógono regular en función del valor del radio R de la circunferencia circunscrita:

$$\mathbf{a = R.\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

- Fórmula para hallar el valor del radio r de la circunferencia inscrita en el octógono regular en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{r = \frac{a.(\sqrt{2}+1)}{2}}$$

- Fórmula para hallar el valor del radio R de la circunferencia circunscrita alrededor del octógono regular en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{R = \frac{a.\left(\sqrt{4+2.\sqrt{2}}\right)}{2}}$$

- Fórmula para hallar el área A del octógono regular en función de la longitud del lado a:

$$\mathbf{A = a^2.2.(\sqrt{2} + 1)}$$

- Fórmula para hallar el área A del octógono regular en función de la longitud del radio r de la circunferencia inscrita:

$$\mathbf{A = r^2.8.(\sqrt{2} - 1)}$$

- Fórmula para hallar el área A del octógono regular en función de la longitud del radio R de la circunferencia circunscrita:

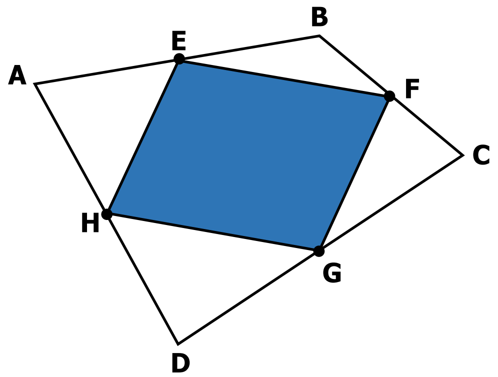
$$\mathbf{A = R^2.2.\sqrt{2}}$$

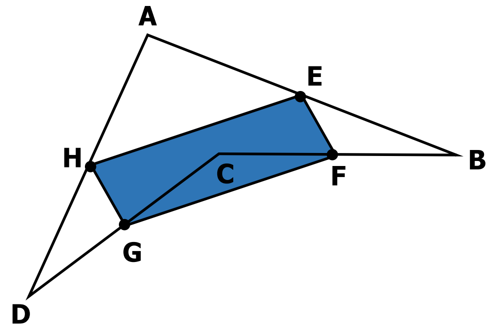
- Cada ángulo interior del octógono regular vale 135° y cada ángulo exterior del octógono regular vale 45°.

$$\propto \mathbf{= 135° \text{ y } \beta = 45°}$$

Teorema de Varignon

En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original.





Siendo ABCD un cuadrilátero y E, F, G y H los puntos medios de sus lados, entonces el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo y se cumple:

$$\text{Área EFGH} = \frac{\text{Área ABCD}}{2}$$

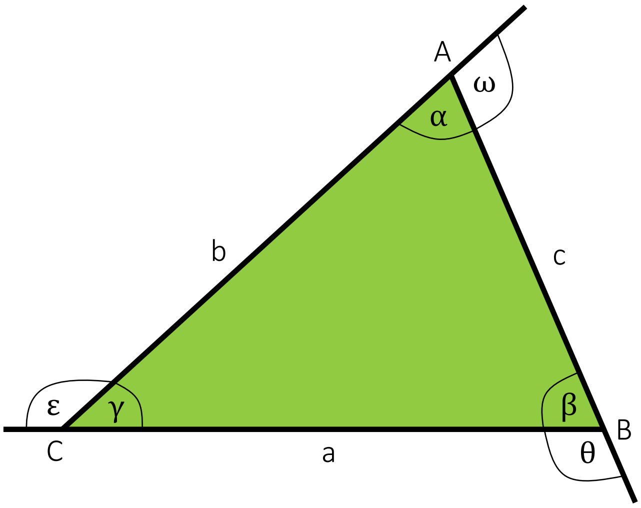
Adicionalmente a tener un área igual a la mitad del cuadrilátero asociado, el paralelogramo de Varignon satisface otras propiedades.

- Para todo cuadrilátero ABCD, los puntos medios de los lados son vértices de un paralelogramo cuyos lados son paralelos a las diagonales de ABCD.
- El perímetro del paralelogramo de Varignon es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero.
- El paralelogramo de Varignon es un rombo sí y sólo si las diagonales del cuadrilátero tienen la misma longitud.
- El paralelogramo de Varignon es un rectángulo sí y sólo si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares.

Como consecuencia:

- El paralelogramo de Varignon es un cuadrado sí y sólo si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares y tienen la misma longitud.

Triángulos



Un triángulo es un polígono de tres lados.
La notación que se utiliza habitualmente es nombrar a sus vértices con las letras mayúsculas A, B y C (pero pueden ser otras, siempre que sean mayúsculas) y a los lados opuestos a estos vértices, con las respectivas minúsculas, tal como se observa en la imagen.

Propiedades Básicas

- La suma de sus ángulos interiores es 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

- La suma de sus ángulos exteriores es 360º.

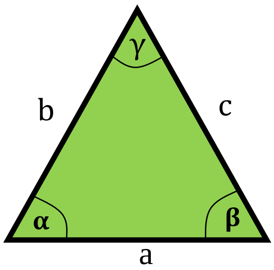
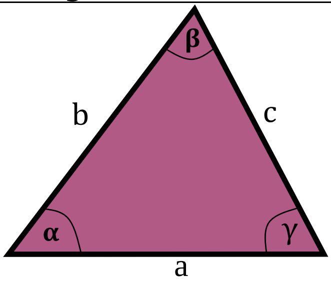
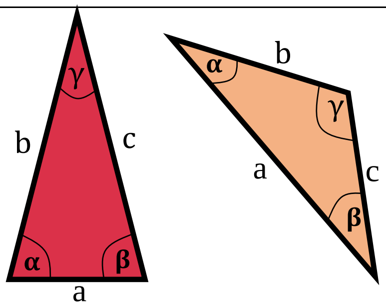
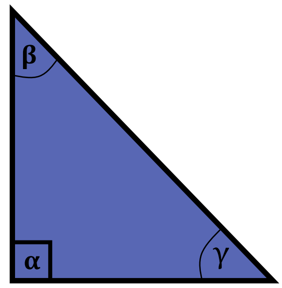
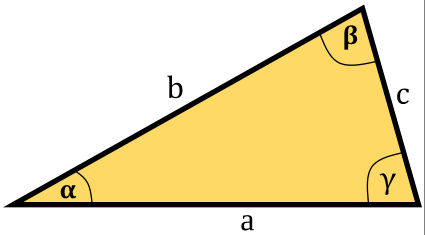
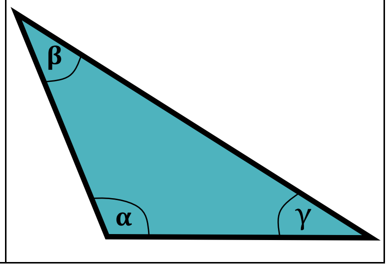
$$\omega + \theta + \varepsilon = 360°$$

- Cada ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

$$\omega = \beta + \gamma;\ \theta = \alpha + \gamma;\ \varepsilon = \alpha + \beta$$

Desigualdad Triangular: En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante: $a + b > c$; $b + c > a$ y $c + a > b$.

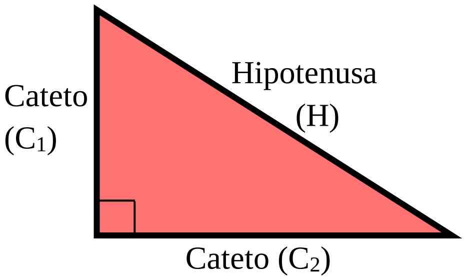
Clasificación de Triángulos

Según sus lados		Según sus ángulos	
Equilátero Tiene todos los lados iguales y todos los ángulos iguales. O sea que cada ángulo mide 60º. **a = b = c** **$\alpha = \beta = \gamma = 60º$**		**Acutángulo** Tiene los tres ángulos agudos. O sea que los tres ángulos miden menos de 90º. **$\alpha < 90º$** **$\beta < 90º$** **$\gamma < 90º$**	
Isósceles Tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales. **b = c** **$\alpha = \beta$**		**Rectángulo** Tiene un ángulo recto. O sea que un ángulo mide exactamente 90º y los otros dos ángulos son agudos. **$\alpha = 90º$** **$\beta < 90º$** **$\gamma < 90º$**	
Escaleno Todos sus lados son diferentes y sus ángulos también. **a ≠ b ≠ c** **$\alpha \neq \beta \neq \gamma$**		**Obtusángulo** Tiene un ángulo obtuso, o sea que un ángulo mide más de 90º. **$\alpha > 90º$** **$\beta < 90º$** **$\gamma < 90º$**	

Triángulos Rectángulos

Teorema de Pitágoras:

El Teorema de Pitágoras afirma que: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".



$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$

Esta fórmula sirve para calcular el tercer lado de un triángulo rectángulo, sabiendo cuánto valen los otros dos.
La hipotenusa siempre es el lado más largo del triángulo.
Los catetos son los dos lados que forman el ángulo recto.

Fórmula despejada para hallar la hipotenusa o un cateto:

$$H = \sqrt{C^2 + C^2} \qquad C = \sqrt{H^2 - C^2}$$

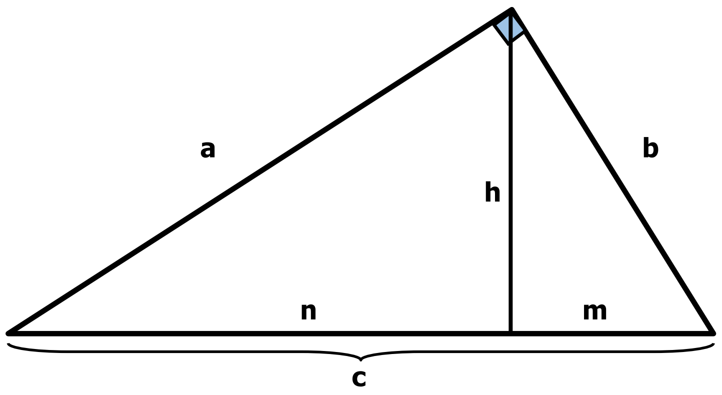
Ternas Pitagóricas: Una terna pitagórica consiste en un trío de números enteros en los que el cuadrado de uno de ellos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. Aplicando el teorema de Pitágoras, también se puede expresar como el conjunto de tres longitudes enteras en las que la mayor de ellas sea la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo y las otras dos sean las longitudes de los catetos de dicho triángulo.

Algunas de las ternas pitagóricas más básicas, dispuestas como una sucesión matemática, y la forma de llegar a ellas, partiendo de un número entero impar (primera columna) o de un número par (segunda columna) son las siguientes:

n Impar	n ; $\frac{n^2-1}{2}$; $\frac{n^2+1}{2}$
3	**(3 ; 4; 5)**
5	**(5 ; 12; 13)**
7	**(7 ; 24; 25)**
9	**(9 ; 40; 41)**
11	**(11 ; 60; 61)**
13	**(13 ; 84; 85)**

n Par	2.n ; $n^2 - 1$; $n^2 + 1$
4	**(8 ; 15; 17)**
6	**(12 ; 35; 37)**
8	**(16 ; 63; 65)**
10	**(20 ; 99; 101)**
12	**(24 ; 143; 145)**
14	**(28 ; 195; 197)**

Teorema del cateto: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto sobre ella.
En la figura, m y n son, respectivamente, las proyecciones de los catetos b y a sobre la hipotenusa c.



$$\mathbf{b^2 = c.m}$$

$$\mathbf{a^2 = c.n}$$

Teorema de la altura de un triángulo rectángulo

En cualquier triángulo rectángulo el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa:

$$\mathbf{h^2 = m.n}$$

De esta fórmula se desprende que: $\mathbf{h = \sqrt{m.n}}$

Y si asociamos esto con el Teorema del cateto, se deduce: $h = \sqrt{m.n} = \sqrt{\frac{b^2}{c}.\frac{a^2}{c}} = \sqrt{\frac{b^2.a^2}{c^2}} = \frac{b.a}{c}$

O sea que: $\mathbf{h = \frac{b.a}{c}}$

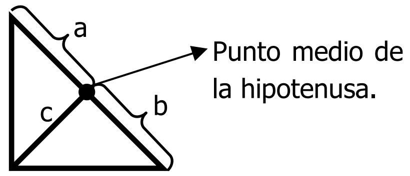
Otra propiedad: El producto de los catetos es igual al producto de la hipotenusa por la altura correspondiente a ella:

$$\mathbf{a.b = c.h}$$

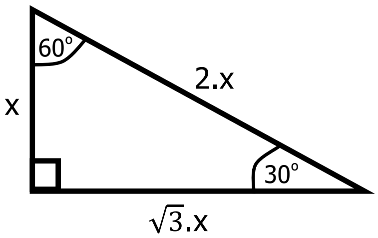
Otras relaciones importantes

El punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices de un triángulo rectángulo:

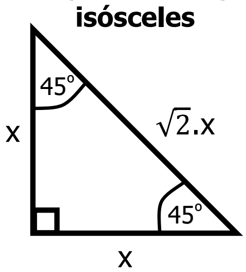
$$\mathbf{a = b = c}$$



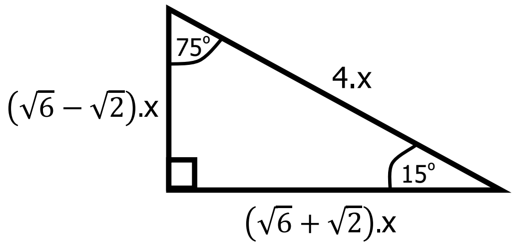
Triángulo medio equilátero



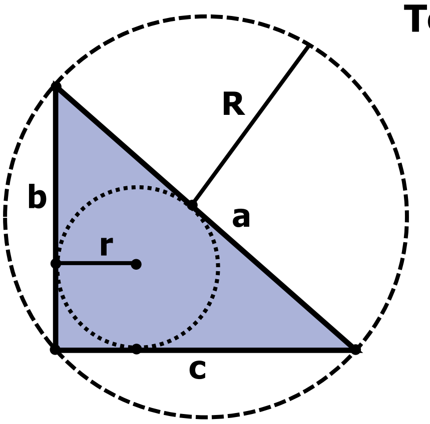
Triángulo rectángulo isósceles



Triángulo rectángulo de ángulos 15° y 75°



Teorema de Poncelet



En un triángulo rectángulo los catetos, la hipotenusa y los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita cumplen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{b + c = a + 2.r}$$

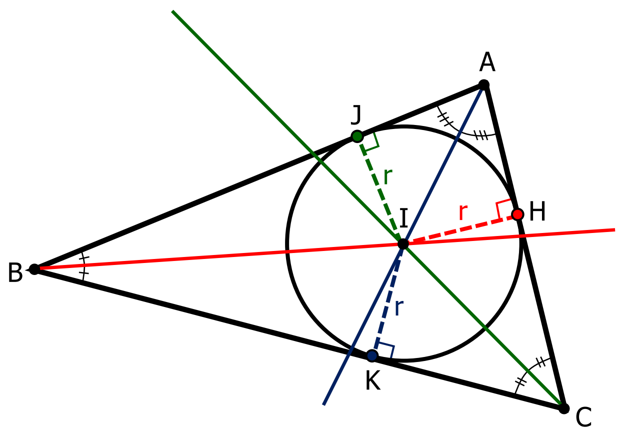
$$\mathbf{b + c = 2.(R + r)}$$

siendo a la hipotenusa, b y c los catetos, r el radio de la circunferencia inscrita y R el radio de la circunferencia circunscrita.

Rectas y puntos notables de un triángulo

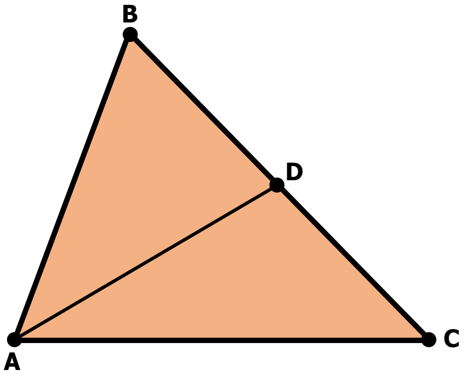
Bisectrices

Las **bisectrices** de un triángulo son las rectas que dividen cada uno de sus ángulos en otros dos iguales.
El **incentro (I)** de un triángulo es el punto de intersección de las tres bisectrices.
El incentro es el centro de la **circunferencia inscrita**.
La bisectriz de $\hat{A}$ corta al lado BC.
La bisectriz de $\hat{B}$ corta al lado AC.
La bisectriz de $\hat{C}$ corta al lado AB.
Desde el incentro I, cualquiera de los segmentos IH, IJ, IK respectivamente perpendiculares a los lados AC, AB, BC representan el radio r de la **circunferencia inscrita** en el triángulo ABC.
Los puntos H, J y K son los puntos de tangencia a los lados AC, AB y BC respectivamente.



Teorema de la bisectriz

Sea ABC un triángulo y D en BC tal que AD es bisectriz (interior o exterior) de $B\hat{A}C$.



El teorema de la bisectriz dice que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

O bien:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$$

En otras palabras, la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto del triángulo en segmentos proporcionales a los lados adyacentes

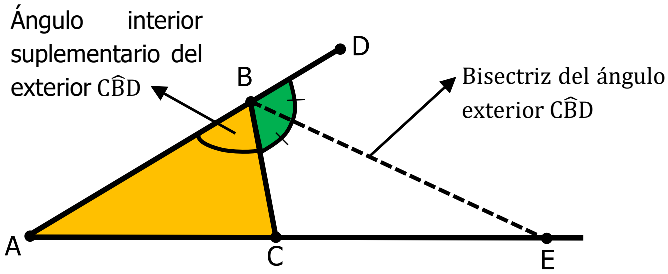
Recíproco del teorema de la bisectriz:

Sea ABC un triángulo y D un punto en BC que cumple $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$. El (recíproco del) teorema de la bisectriz dice que D es el pie de una de las bisectrices de $B\hat{A}C$ (es el pie de la bisectriz interior si está en el segmento BC y de la exterior si está en la prolongación).

Consecuencia útil del teorema de la bisectriz: Si AD es la bisectriz interior de $B\hat{A}C$ entonces:

$$BD = \frac{AB}{AB+AC}.\ BC \qquad y \qquad CD = \frac{AC}{AC+AB}.\ BC$$

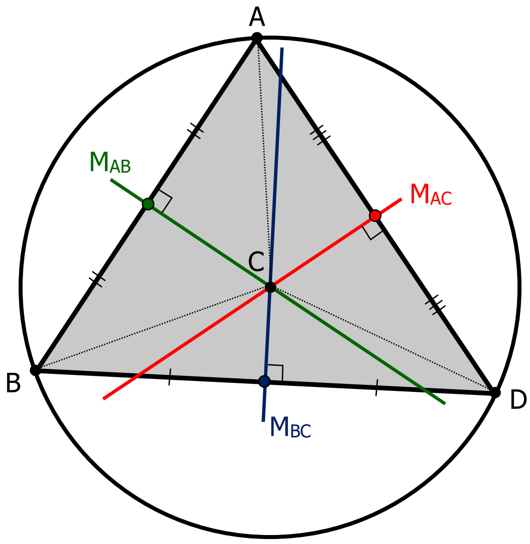
Teorema de la bisectriz de un ángulo exterior del triangulo



La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo divide a la prolongación del lado opuesto en dos segmentos, cuyas medidas son proporcionales a los lados que forman el ángulo interior suplementario del ángulo exterior.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CE}{CB}$$

Mediatrices



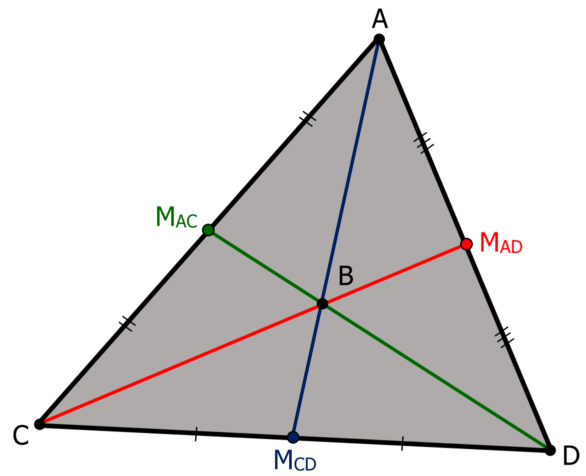
Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a cada uno de los lados que los cortan por sus puntos medios.

- M_{AB} es la mediatriz del lado AB, es perpendicular a AB y pasa por su punto medio.
- M_{AC} es la mediatriz del lado AC, es perpendicular a AC y pasa por su punto medio.
- M_{BC} es la mediatriz del lado BC, es perpendicular a BC y pasa por su punto medio.

El **circuncentro (C)** de un triángulo es el punto en el que se cortan sus tres mediatrices.
El **circuncentro** es el centro de la **circunferencia circunscrita** que es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

CB = CD = CA = radio de la circunferencia circunscrita.

Medianas



Las **medianas** de un triángulo son los segmentos que unen los vértices con los puntos medios de sus respectivos lados opuestos.

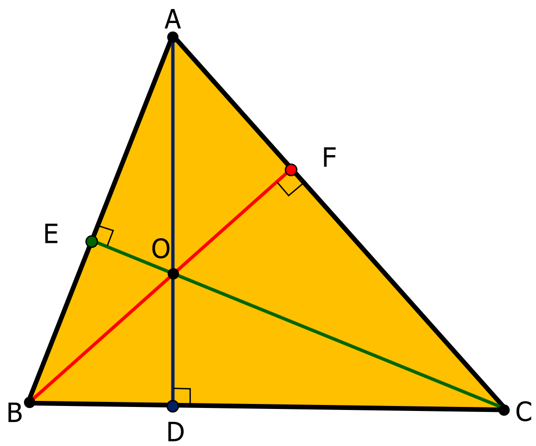
El **baricentro (B) o centroide** de un triángulo es el punto en el que se cortan las tres medianas.
Este punto divide a cada una de las medianas en la relación 1:2, o sea:

AB = 2.BM$_{CD}$

BM$_{AD}$ = 2.BC

BM$_{AC}$ = 2.BD

Alturas



Las **alturas** de un triángulo son los segmentos que unen los vértices con sus respectivos lados opuestos, o con sus prolongaciones, y son perpendiculares a estos.
El **ortocentro (O)** de un triángulo es el punto en el que se cortan las tres alturas.
Los puntos **F**, **E**, y **D** son los pies de las alturas de los lados **AC**, **AB** y **BC** respectivamente.

En todo triángulo:
- Al menos una de las alturas se encuentra dentro del triángulo.
- La altura de mayor longitud es la correspondiente a la del lado menor del triángulo.
- La suma de las tres alturas de todo triángulo es menor que el perímetro de este.

Para cualquier triángulo, conociendo la longitud de los tres lados (**a**, **b**, **c**), se pueden calcular las longitudes de las alturas **h$_a$**, **h$_b$** y **h$_c$**, aplicando las siguientes fórmulas:

$$\mathbf{h_a = \frac{2}{\mathit{a}}.\ \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}} \qquad \mathbf{h_b = \frac{2}{b}.\ \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}};$$

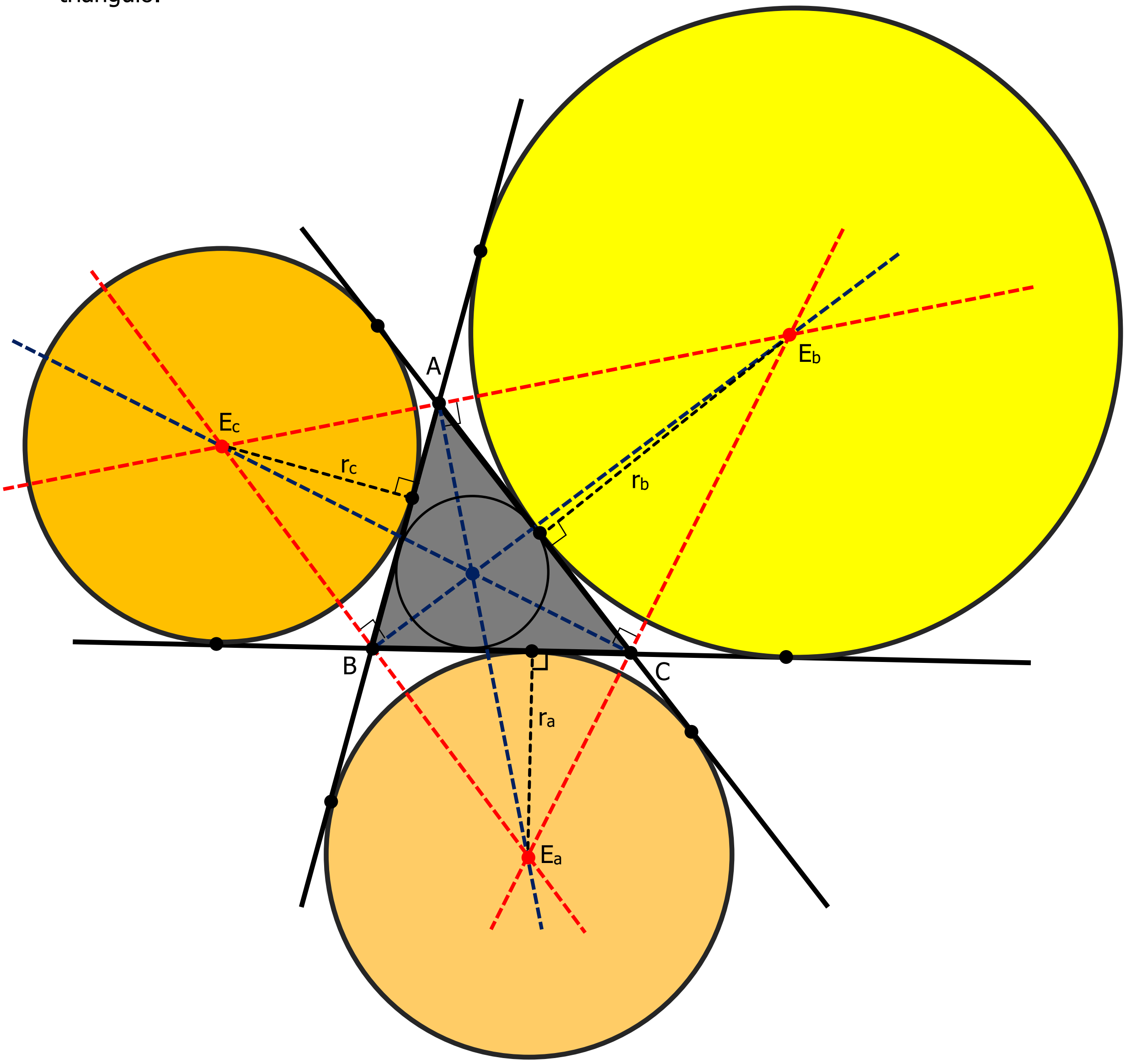
$$\mathbf{h_c = \frac{2}{c}.\ \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}$$

donde p es el perímetro del triángulo: **p = a + b + c**

Circunferencia exinscrita

La **circunferencia exinscrita** a un triángulo es tangente a uno de los lados del triángulo y a las prolongaciones de los otros dos lados. Al centro de la circunferencia exinscrita se le llama exincentro. Se pueden trazar tres circunferencias exinscritas para cada triángulo.

- Una circunferencia exinscrita está en el exterior de un triángulo, excepto el punto de tangencia que pertenece, exactamente a uno de sus lados.
- Las bisectrices exteriores e interiores son perpendiculares entre sí en los vértices del triángulo.
- A las circunferencias exinscritas y la circunferencia inscrita se les llama circunferencias tritangentes al triángulo.



El **exincentro** es el centro de una circunferencia exinscrita; es la intersección de las bisectrices de cualesquiera dos de los tres ángulos exteriores y la bisectriz interior del ángulo opuesto del lado tangente. Todo triángulo posee tres exincentros.

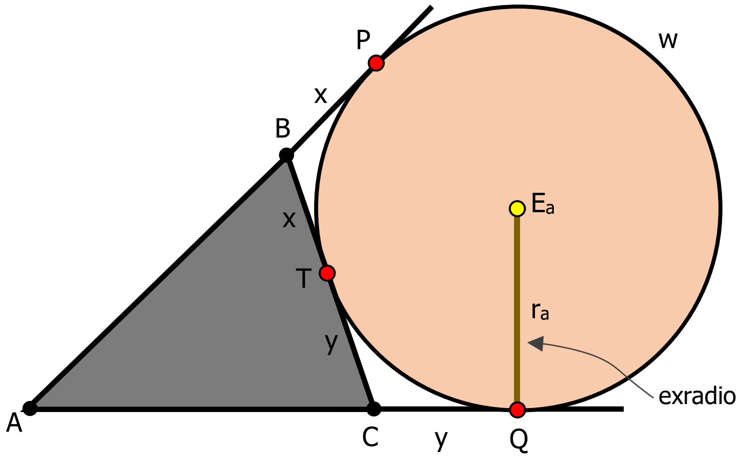
Propiedades de las circunferencias exinscritas.

En el triángulo ABC, w es la circunferencia exinscrita relativa al lado BC.
T es el punto de tangencia con el lado BC.
P y Q son los puntos de tangencia con las prolongaciones de los lados AB y AC respectivamente.

Se cumple que:

BP = BT = x

CQ = CT = y

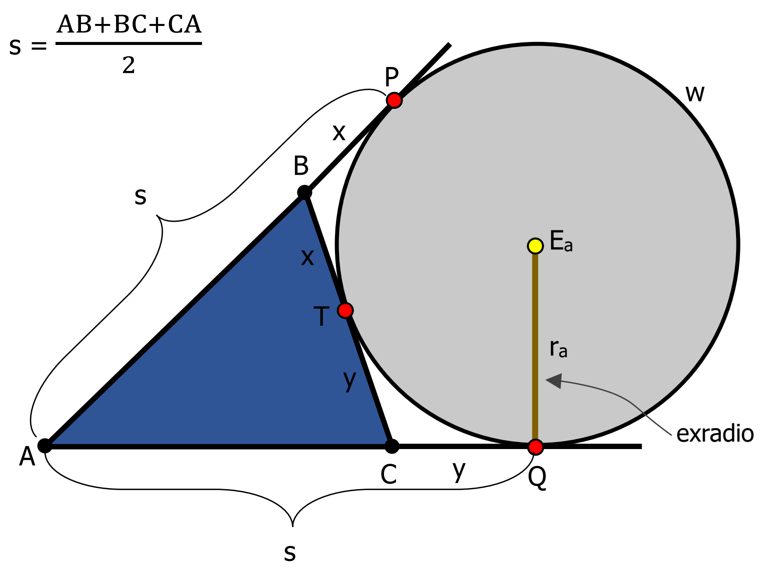


ABC es un triángulo, w es la circunferencia exinscrita relativa al lado BC. P y Q son los puntos de tangencia de la circunferencia w con las prolongaciones de los lados AB y AC respectivamente.
s es el semiperímetro del triángulo ABC, o sea: $s = \frac{AB+BC+CA}{2}$

Se cumple que:

AP = AQ = s

Demostración:
- Perímetro (ABC) = AB + BC + AC
- Perímetro (ABC) = AB + x + y + AC
- Perímetro (ABC) = AP + AP
- Perímetro (ABC) = 2.AP
- Semiperímetro (ABC) = s = AP

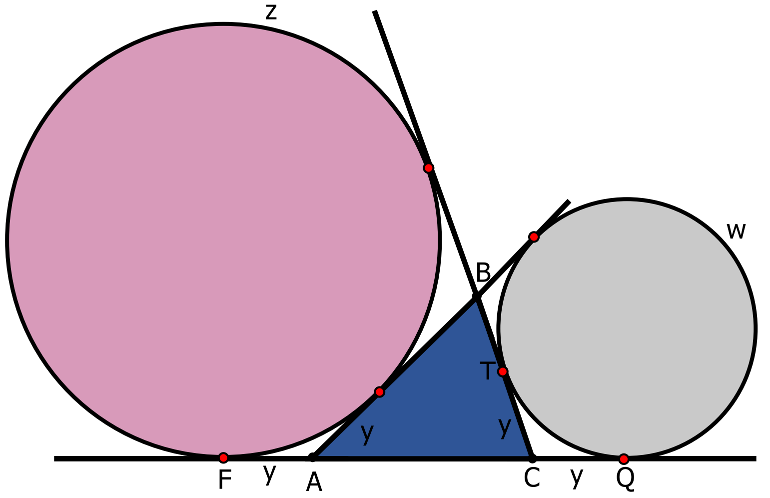


ABC es un triángulo, w y z son las circunferencias exinscritas relativas a los lados BC y AB respectivamente.
Q y F son los puntos de tangencia de las circunferencias w y z con la prolongación del lado AC.

Se cumple que:

FA = CQ

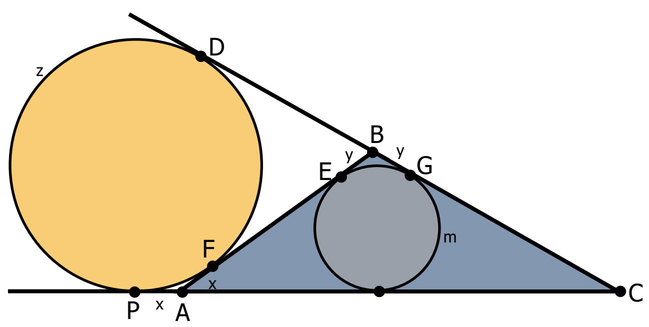
Demostración:
- FA + AC = Semiperímetro s.
- AC + CQ = Semiperímetro s.
- Entonces FA + AC = AC + CQ, simplificando AC queda: FA = CQ.



ABC es un triángulo, z es la circunferencia exinscrita relativa al lado AB, m es la circunferencia inscrita.
F y P son los puntos de tangencia de la circunferencia exinscrita z con el lado AB y con la prolongación del lado AC respectivamente.
E y G son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita m con los lados AB y BC respectivamente.

Se cumple que:

EB = BG = y = PA = AF = x



La suma de las medidas de los radios de las circunferencias exinscritas relativas a los catetos de un triángulo rectángulo, es igual a la medida de la hipotenusa.

Trigonometría

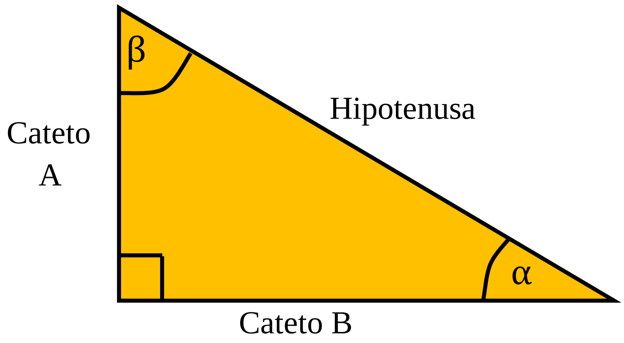
La trigonometría es la parte de la matemática que estudio las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.

Triángulos rectángulos:

Dado un triángulo rectángulo (con un ángulo de recto), llamamos **hipotenusa** al lado más grande del triángulo y **catetos** a los otros dos lados.

Dada el siguiente triángulo:

- Si nos ubicamos sobre el ángulo α, llamaremos **Cateto Opuesto** al cateto A y **Cateto Adyacente** al cateto B.
- Si nos ubicamos sobre el ángulo β, llamaremos **Cateto Opuesto** al cateto B y **Cateto Adyacente** al cateto A.



A partir de estos datos surgen tres relaciones muy importantes:

$$\textbf{Seno } \alpha = \frac{\textbf{Cateto Opuesto}}{\textbf{Hipotenusa}}$$

$$\textbf{Coseno } \alpha = \frac{\textbf{Cateto Adyacente}}{\textbf{Hipotenusa}}$$

$$\textbf{Tangente } \alpha = \frac{\textbf{Cateto Opuesto}}{\textbf{Cateto Adyacente}}$$

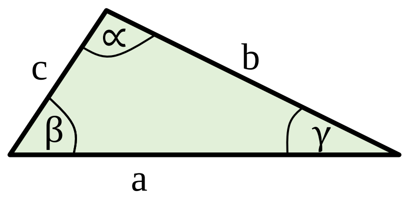
Estas relaciones se abrevian mediante la siguiente sigla:

SOH – CAH – TOA

Triángulos oblicuángulos:

Un triángulo oblicuángulo es aquel que no tiene ningún ángulo recto.

Dado un triángulo oblicuángulo como el de la figura:



Teorema del Seno

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen} \propto} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen}\ \beta} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen}\ \gamma}$$

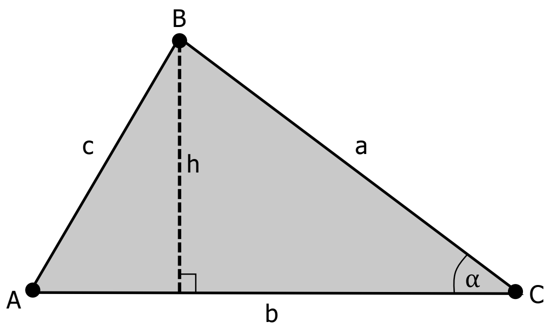
Teorema del Coseno

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \propto}$$
$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \beta}$$
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \gamma}$$

Área de un triángulo

Diferentes formas de hallar el valor del área de un triángulo:

- **A través del valor de los lados, de la altura y un ángulo:**



A, B y C: Vértices del triángulo.
a, b y c: lados del triángulo
h altura relativa al lado AC = b
γ ángulo $A\hat{C}B$.

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b.h}}{\mathbf{2}}$$

(La clásica fórmula, base por altura dividido dos)

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b.a.sin\ \gamma}}{\mathbf{2}}$$

(*Ya que la altura* h = a. sin γ).

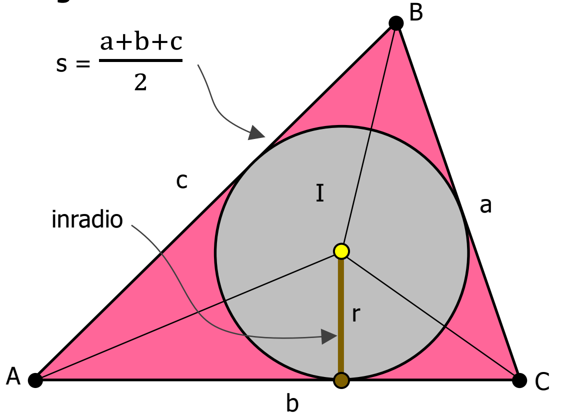
La fórmula de Herón:

La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo conociendo las medidas de sus tres lados y sin usar trigonometría. La siguiente expresión es la fórmula de Herón para el área A de un triángulo conociendo las medidas a, b y c de sus lados:

$$\mathbf{A = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}}$$

Donde **s** es el semiperímetro del triángulo, es decir: $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a+b+c}}{\mathbf{2}}$

- **Área del triángulo a través de la circunferencia inscrita:**



A, B y C: Vértices del triángulo.

a, b y c: lados del triángulo

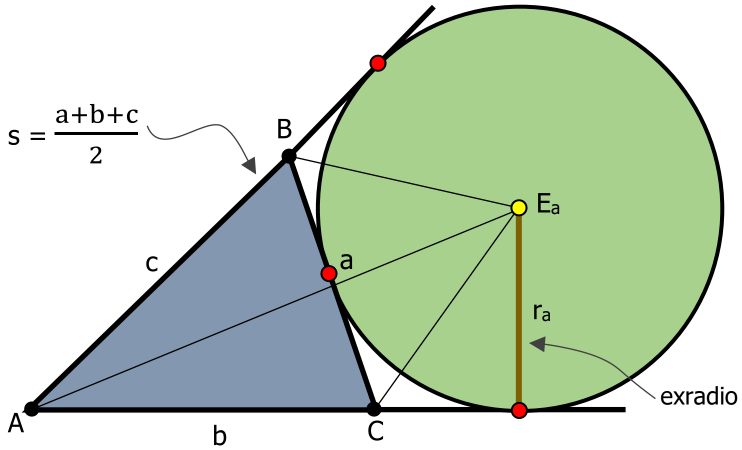
I: Incentro (punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores).

r: Inradio (radio de la circunferencia inscrita).

s: Semiperímetro $\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$

A = s.r

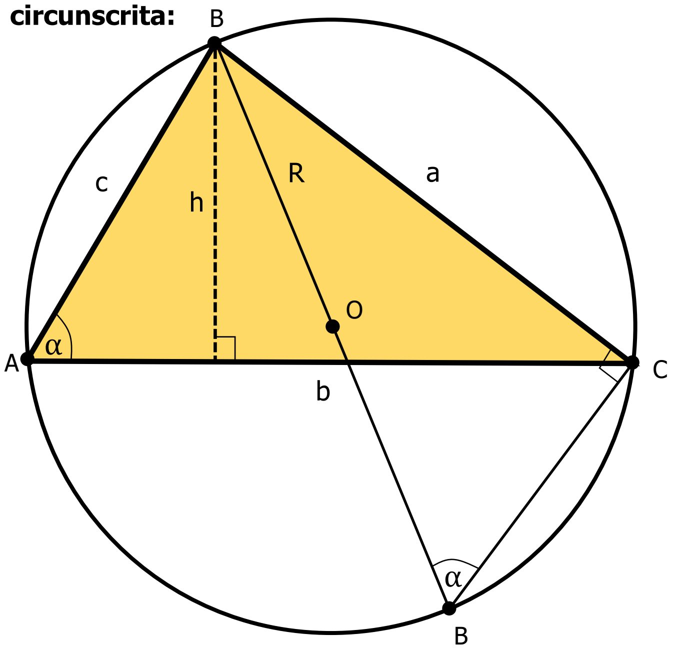
- **Área del triángulo a través de la circunferencia exinscrita:**



A, B y C: Vértices del triángulo.
a, b y c: lados del triángulo
E_a: Exincentro. Es el centro de la circunferencia exinscrita y el punto de intersección de dos de las bisectrices exteriores y la bisectriz interior del ángulo opuesto la lado a, que es el lado tangente a la circunferencia exinscrita).
r: Exradio (radio de la circunferencia exinscrita).
s: Semiperímetro $\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$

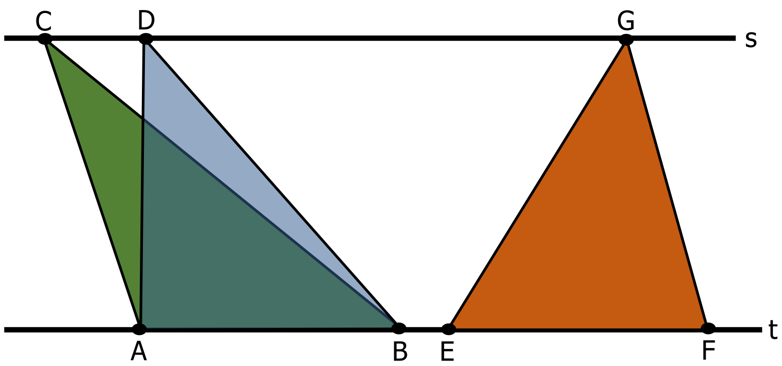
A = r_a.(s – a)

- **Área del triángulo a través de la circunferencia circunscrita:**



A, B y C: Vértices del triángulo.
a, b y c: lados del triángulo.
h: Altura del triángulo, correspondiente al lado AC.
O: Es el centro de la circunferencia circunscrita (punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo ABC).
$B\hat{A}C = C\hat{B'}O = \alpha$
R: Radio de la circunferencia circunscrita.

$$\mathbf{A = \frac{a.b.c}{4.R}}$$



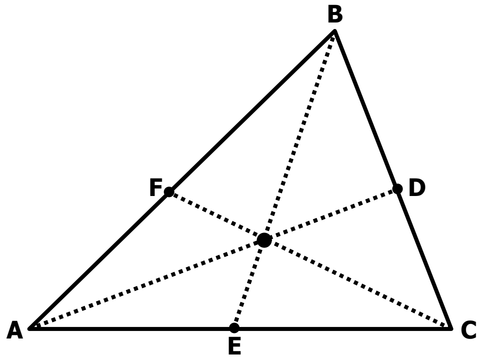
Si dos triángulos tienen la misma base, y el tercer vértice de ambos está en una misma recta paralela a la base, entonces sus áreas son iguales, ya que sus alturas también serán iguales.

Si s ǁ t
Área(ABC) = Área(ABD)

Aparte, si AB = EF, entonces:
Área(ABC) = Área(ABD) = Área(EFG)

Teorema de Ceva

Sea ABC un triángulo y D, E y F puntos en los lados BC, CA y AB respectivamente.



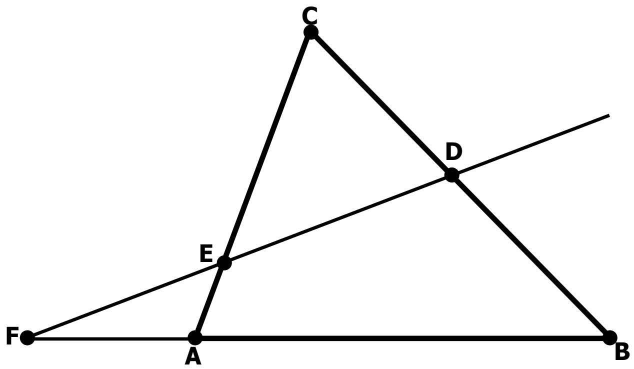
Entonces las rectas AD, BE y CF concurren si y sólo si:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = 1$$

Teorema de Menelao

Este teorema da una condición que se cumple cuando tres puntos en los lados de un triángulo están alineados. Recíprocamente, (teniendo cuidado con dónde están los puntos) permite probar que tres puntos están alineados.

Sean ABC un triángulo y D, E, F puntos en BC, CA y AB respectivamente, tales que D, E y F están alineados.



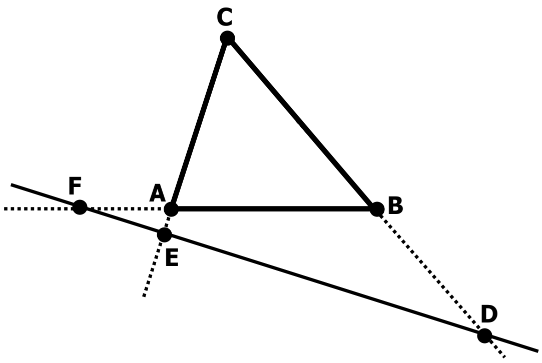
El teorema de Menelao dice que:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = 1$$

Recíproco del teorema de Menelao:

Sean ABC un triángulo y D, E, F puntos en BC, CA y AB respectivamente, de modo que dos de los puntos D, E, F estén en los lados y el restante en la prolongación o que los tres puntos están en las prolongaciones. Si se cumple $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$ = 1, entonces los puntos D, E y F están alineados.

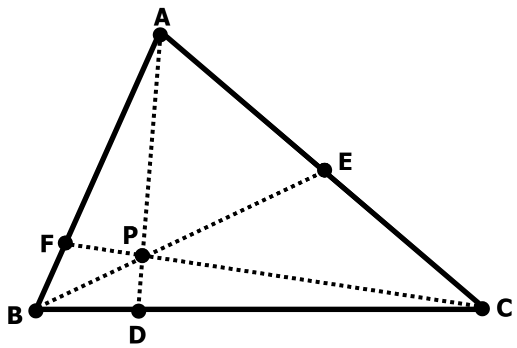
En caso de que los puntos estén en las prolongaciones de los lados, un posible dibujo sería como el que se muestra a la derecha:



Lema de Shmerkin

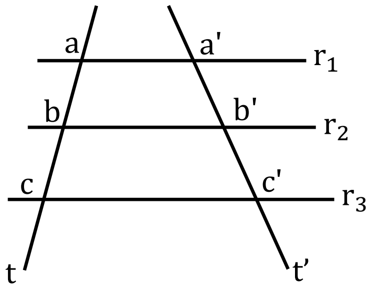
Sean ABC un triángulo y D, E, F puntos en los lados BC, CA y AB respectivamente, tales que AD, BE y CF concurren en un punto P. Entonces:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$$



Teorema de Tales

Dadas tres rectas paralelas (r_1, r_2 y r_3) y dos rectas transversales (t y t'):



$r_1 \mathbin{/\!/} r_2 \mathbin{/\!/} r_3$

t y t': Rectas transversales.

Al cortar t y t' a las rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, quedan determinados, sobre aquellas rectas, varios segmentos:

Sobre la recta **t**: segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$

Sobre la recta **t'**: segmentos $\overline{a'b'}$ y $\overline{b'c'}$

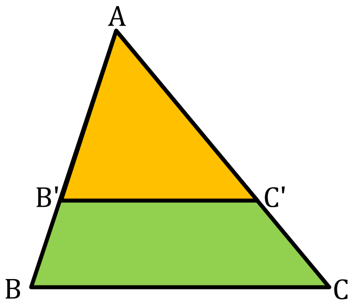
Suele decirse que $\overline{a'b'}$ es el segmento correspondiente de $\overline{ab}$ y, de manera similar, $\overline{b'c'}$ es el segmento correspondiente de $\overline{bc}$.

El teorema de Tales afirma que, bajo las condiciones dadas en la figura anterior, los segmentos que están sobre una de las transversales son proporcionales a los segmentos correspondientes sobre la otra transversal, es decir:

$$\frac{\overline{\mathbf{ab}}}{\overline{\mathbf{bc}}} = \frac{\overline{\mathbf{a'b'}}}{\overline{\mathbf{b'c'}}}$$

El teorema de Tales en un triángulo

Dado un triángulo ABC, si se traza un segmento paralelo, $\overline{b'c'}$ a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo $AB'C'$, cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC.



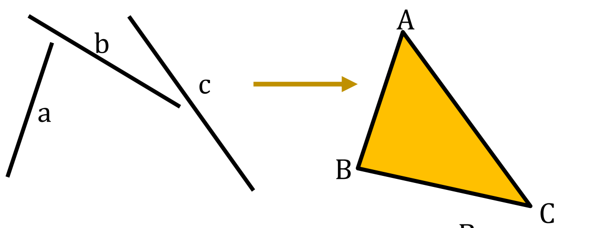
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Congruencia de figuras

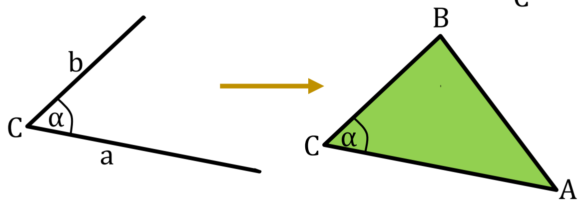
Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma, el mismo tamaño y la misma superficie, es decir, si al colocarlas una sobre la otra son coincidentes en toda su extensión.

Criterios de congruencia de triángulos:

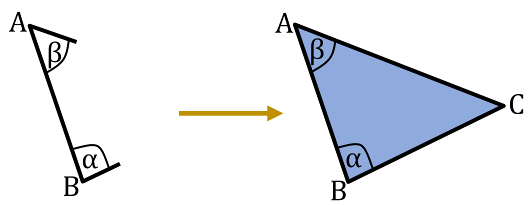
- **Criterio (LLL) (Tres lados congruentes)**: Si los tres lados de dos triángulos son respectivamente congruentes, los triángulos son congruentes.



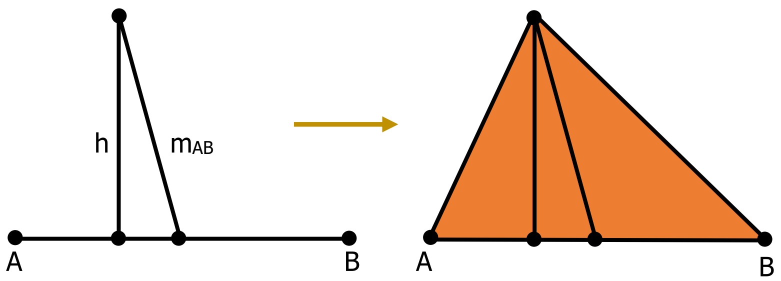
- **Criterio (LAL) (Dos lados y el ángulo comprendido)**: Dos triángulos son congruentes si son respectivamente congruentes dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos



- **Criterio (ALA) (lado y ángulos adyacentes)**: Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes un lado y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado. A estos ángulos los llamaremos adyacentes al lado.



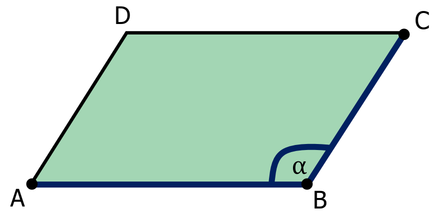
- **Criterio (LHM) (lado, altura y mediana):**
  Dos triángulos serán congruentes si tienen congruentes un lado y la altura y la mediana correspondiente a ese lado.



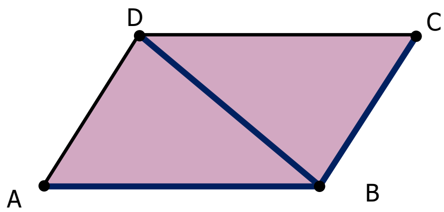
Criterios de congruencia de cuadriláteros

Paralelogramos:

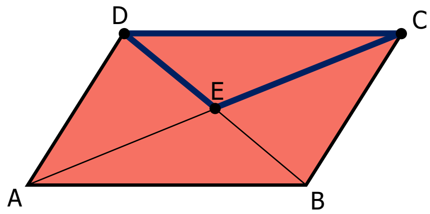
- Si dos paralelogramos tienen dos lados adyacentes de uno congruentes a dos lados adyacentes del otro y el ángulo comprendido también congruente, son congruentes.



- Si dos paralelogramos tienen dos lados adyacentes de uno congruentes a dos lados adyacentes del otro y la diagonal que une sus extremos, también congruente, entonces los paralelogramos son congruentes.

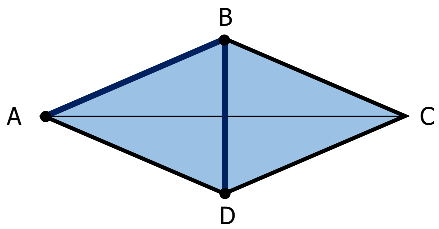


- Dos paralelogramos son congruentes si tienen un lado y las dos semidiagonales unidas a los extremos de dicho lado también congruentes.

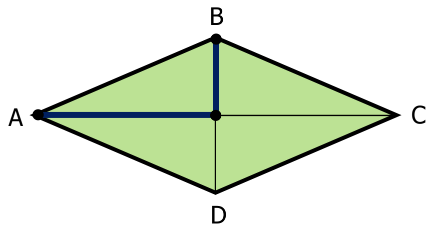


Rombos:

- Dos rombos son congruentes si tienen un lado y una diagonal congruente.
  Nota: Que tengan un lado congruente significa que los otros tres también lo serán.



- Dos rombos son congruentes si tienen las dos semidiagonales perpendiculares también congruentes.



Trapecios:

Si un trapecio tiene todos sus lados congruentes a los lados de otro trapecio y los que son paralelos en uno de ellos son congruentes a los lados paralelos en el otro, entonces los trapecios son congruentes.

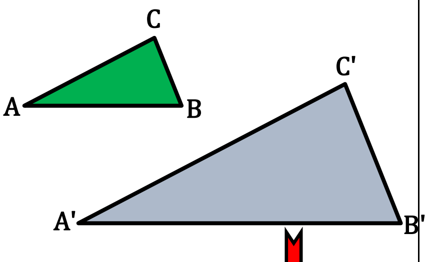
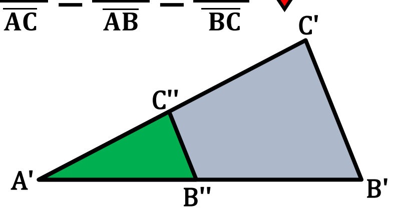
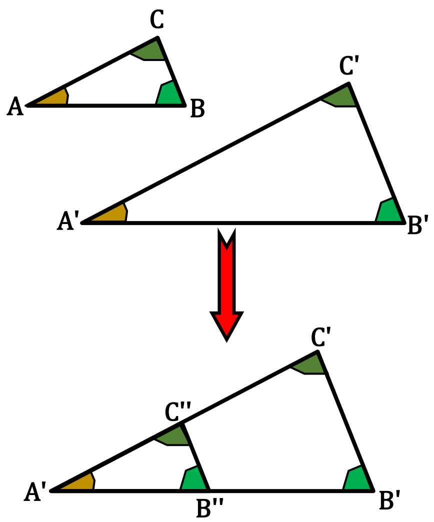
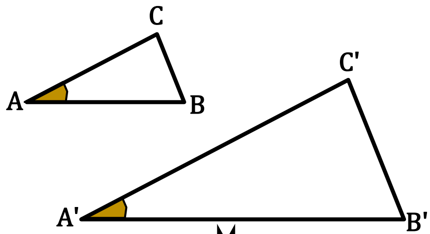
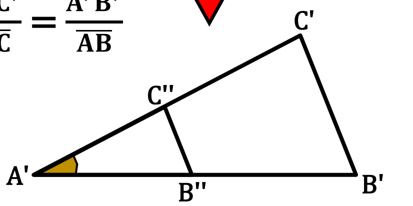
Semejanza de figuras

Dos figuras son semejantes cuando todos sus ángulos son congruentes y sus lados proporcionales.

Si dos figuras son semejantes, la constante de proporcionalidad de sus lados se llama ***razón de semejanza*** y se calcula como el cociente de las medidas de los lados correspondientes.

Criterios de semejanza de triángulos

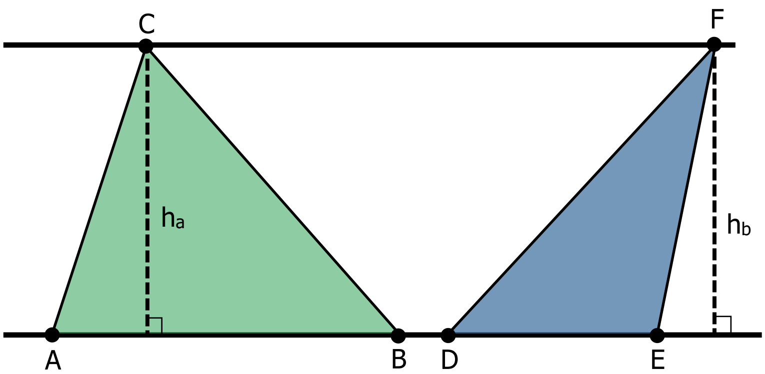
Para determinar si dos triángulos son semejantes, no es necesario probar la proporcionalidad de los lados correspondientes y la congruencia de los ángulos correspondientes; existen criterios que permiten analizar si son semejantes a partir de una cantidad mínima de información.

Criterio 1 (LLL)	Criterio 2 (AA)	Criterio 3 (LAL)
Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados respectivamente proporcionales.  $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ 	Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno son congruentes con dos ángulos del otro. 	Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido congruente.  $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ 

Algo más sobre semejanza de triángulos

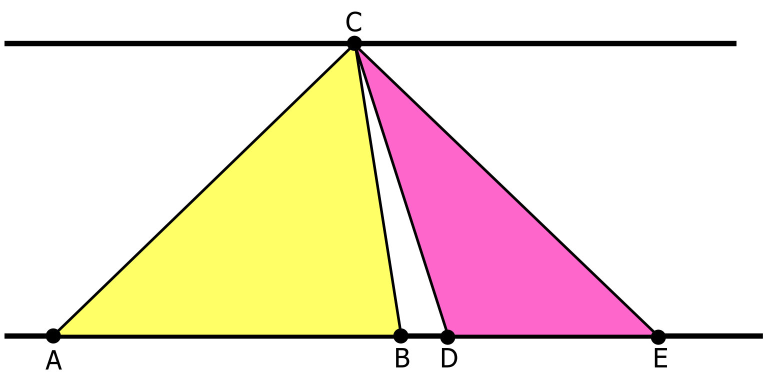
Si dos triángulos tienen la misma altura (**h**$(h_a = h_b)$ y sus bases están contenidas en una misma recta, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases:

$$\frac{\text{Área (ABC)}}{\text{Área (DEF)}} = \frac{AB}{DE}$$



Como consecuencia de lo enunciado anteriormente, si dos triángulos tienen un lado contenido en una misma recta y comparten el tercer vértice, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases:

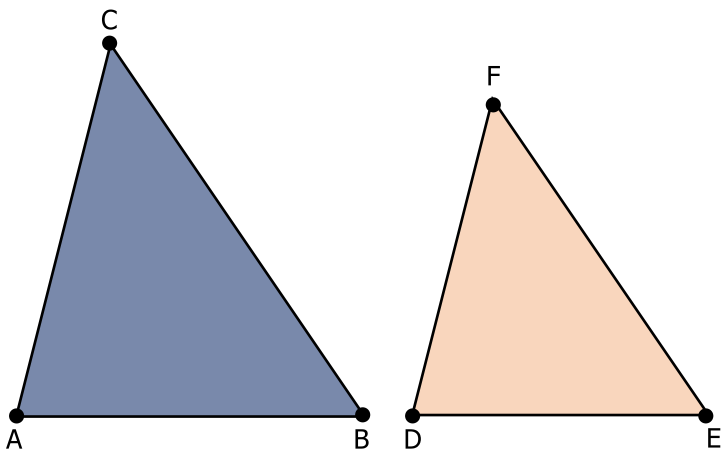
$$\frac{\text{Área (ABC)}}{\text{Área (DEC)}} = \frac{AB}{DE}$$



Si dos triángulos son semejantes, la razón entre las áreas es igual al cuadrado de la razón entre lados correspondientes:

$$\frac{\text{Área(ABC)}}{\text{Área(DEF)}} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{CA}{FD}\right)^2 = \left(\frac{CB}{FE}\right)^2$$

Dicho de otra forma, si D es la razón entre las áreas y d es la razón entre los lados, entonces **D = d²**.

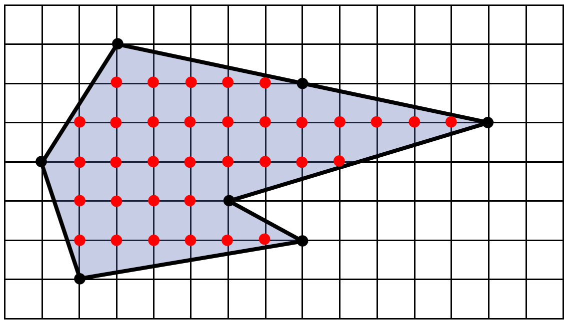


Teorema de Pick

El **teorema de Pick** es una fórmula que relaciona el área de un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras (los polígonos reticulares) con el número de puntos en su interior y en su borde (frontera) que tengan también coordenadas enteras.

El **teorema de Pick** establece: Sea un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras. Si **B** es el número de puntos enteros en el borde, **I** el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área **A** del polígono se puede calcular con la fórmula:

$$\mathbf{A = I + \frac{B}{2} - 1.}$$



En este ejemplo: **B = 7** **I = 34**

$$\mathbf{A = 34 + \frac{7}{2} - 1 = 36{,}5}$$

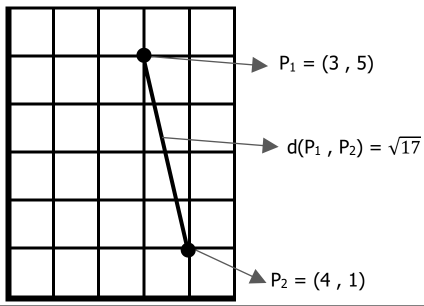
Distancia entre dos puntos o entre un punto y una recta

Distancia entre dos puntos en el plano: La distancia entre dos puntos del plano, **P_1 = (x_1 , y_1)** y **P_2 = (x_2 , y_2)**, queda determinada por:

$$\mathbf{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejemplo: Si P_1 = (3 , 5) y P_2 = (4 , 1), entonces la distancia entre P_1 y P_2 es:

$d(P_1,P_2) = \sqrt{(4-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$



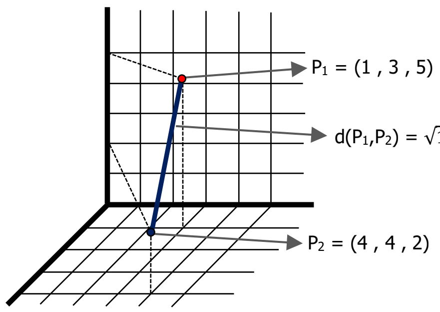
Distancia entre dos puntos en el espacio: La distancia entre dos puntos en el espacio, **P_1 = (x_1 , y_1 , z_1)** y **P_2 = (x_2 , y_2 , z_3)**, queda determinada por:

$$\mathbf{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Ejemplo: P_1 = (1 , 3, 5) y P_2 = (4 , 4, 2) , entonces la distancia entre P_1 y P_2 es:

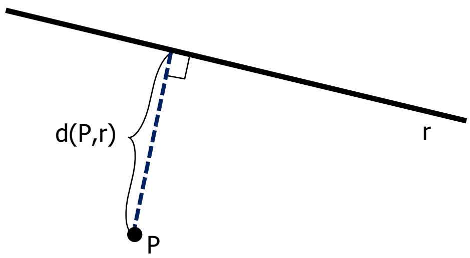
$d(P_1,P_2) = \sqrt{(4-1)^2 + (4-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-3)^2}$

$d(P_1,P_2) = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$



Distancia entre un punto y una recta: La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazado desde el punto. Dada una recta r de ecuación r = Ax + By + C = 0 y un punto P de coordenadas P = (x_0, y_0), la distancia entre r y P se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\mathbf{d(P,r) = \frac{|x_0.A + y_0.B + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

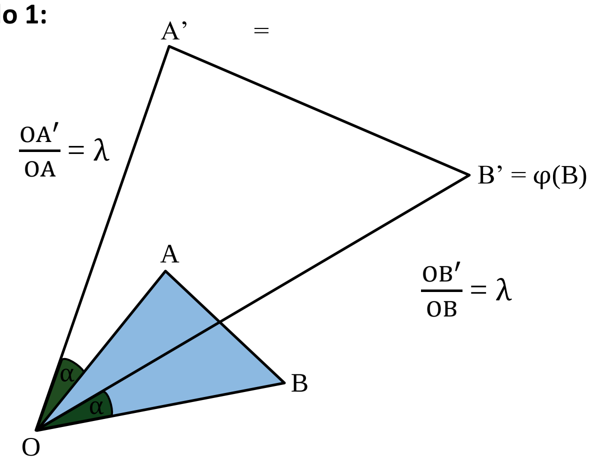


Rotohomotecia

Se llama **rotohomotecia** $\boldsymbol{\varphi}$ de centro **O**, ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ y razón $\boldsymbol{\lambda}$ a la combinación de una rotación de ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ con una con una homotecia de razón $\boldsymbol{\lambda}$, ambas transformaciones con el mismo centro **O**. El orden de aplicación es irrelevante: primero la homotecia y después la rotación, o viceversa.

Veamos algunos ejemplos:

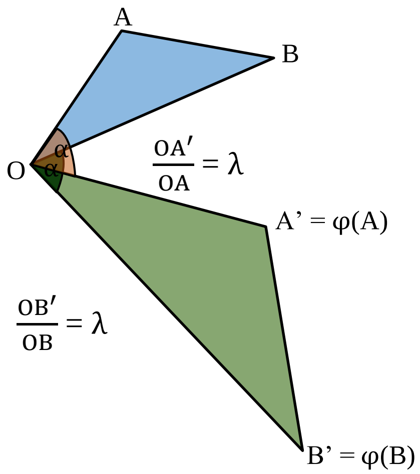
Ejemplo 1:



En este caso, partiendo del triángulo **OAB**, se aplicó una rotohomotecia $\boldsymbol{\varphi}$ de centro **O**, ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ **= 20°** en sentido antihorario y razón $\boldsymbol{\lambda}$ **= 2**. De esta forma se obtiene el triángulo OA’B’ y se cumple que:

$\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = 2 = \lambda$ y $B\hat{O}B' = A\hat{O}A' = 20°$

Ejemplo 2:



En este caso, partiendo del triángulo **OAB**, se aplicó una rotohomotecia $\boldsymbol{\varphi}$ de centro **O**, ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ **= 70°** en sentido horario y razón $\boldsymbol{\lambda}$ **= 1,5**. De esta forma se obtiene el triángulo OA’B’ y se cumple que:

$\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = 1{,}5 = \lambda$ y $B\hat{O}B' = A\hat{O}A' = 70°$

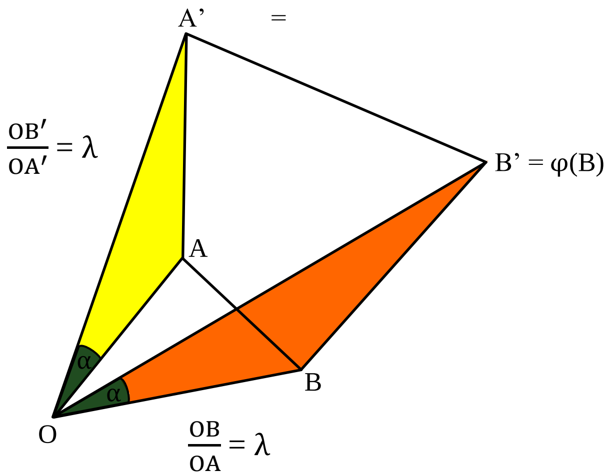
Por definición, todos los triángulos **O,X,** $\boldsymbol{\varphi}$**(X)** son semejantes entre sí, por uno de los criterios de semejanza de triángulos: todos tendrán un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ en el vértice **O** y los lados adyacentes tendrán cociente constante $\boldsymbol{\lambda}$. Veamos esto último, tomando como referencia el gráfico del ejemplo 1:

Aquí hemos agregado los segmentos $\overline{A'A}$ y $\overline{B'B}$ y vemos que los triángulos O,A,φ(A) y O,B,φ(B) son semejantes porque:

$A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = \alpha$.

Por otra parte, como ya sabíamos que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \lambda$

de esta relación se desprende que $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \lambda$.

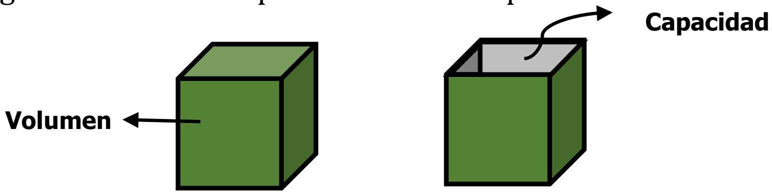


Combinado estos hechos se tiene el siguiente:

Teorema (Dos semejanzas con el mismo centro) *Si OBB’ y OAA’ son triángulos semejantes, también son semejantes OAB y OA’B’.*

Relación entre las unidades de volumen y capacidad

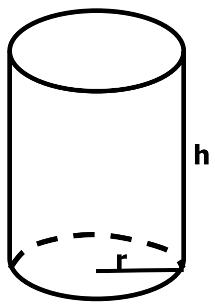
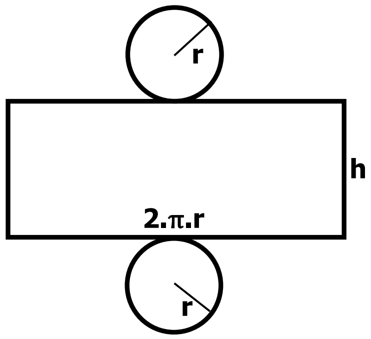
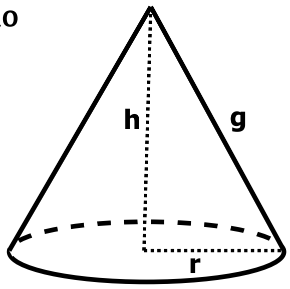
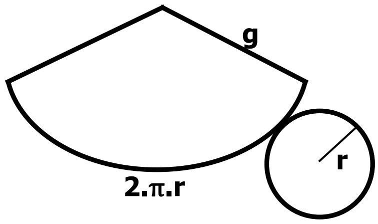
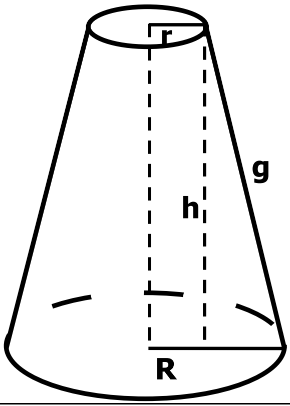
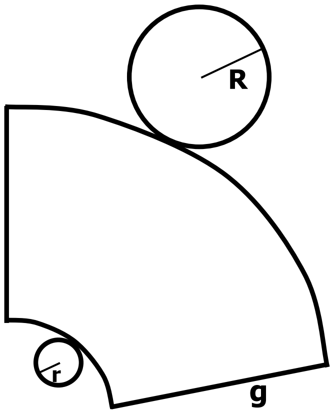
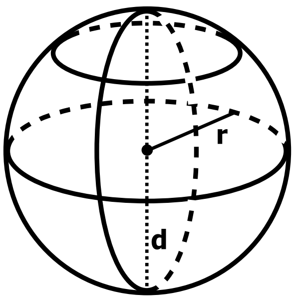
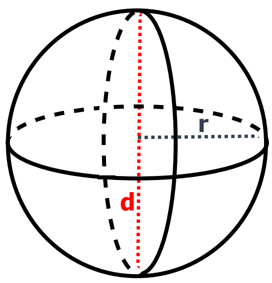
El volumen es la **cantidad** de espacio que ocupa un cuerpo y **capacidad** es lo que cabe dentro de un cuerpo. En general se llama capacidad de un recipiente a su volumen.



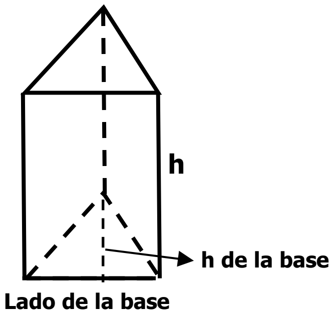
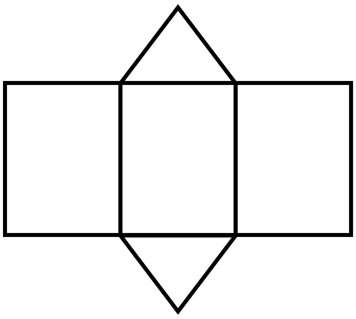
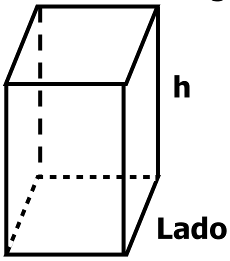
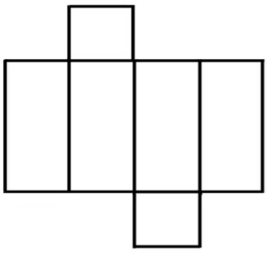
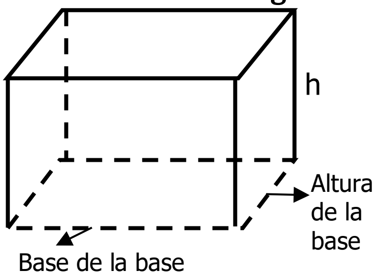
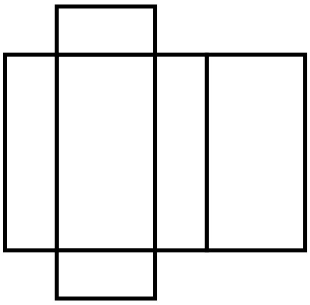
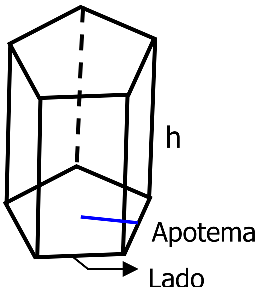
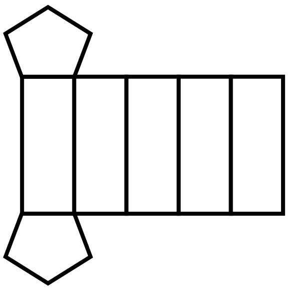
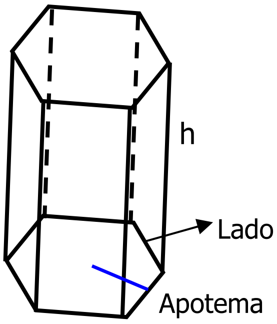
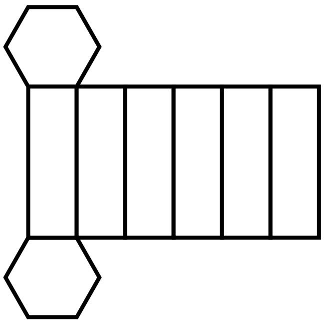
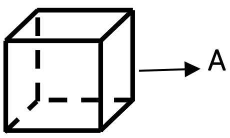
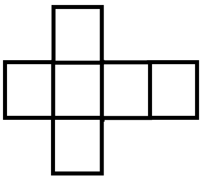
Una de las relaciones más importantes entre las unidades de volumen y capacidad es la siguiente: $1dm^3 = 1$ litro.

Fórmulas de superficie y volumen de cuerpos geométricos

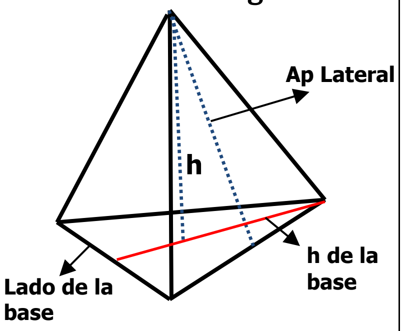
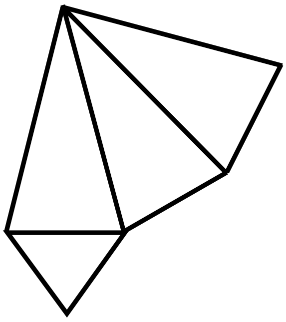
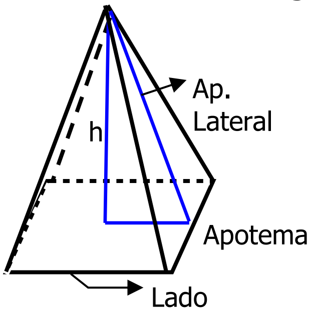
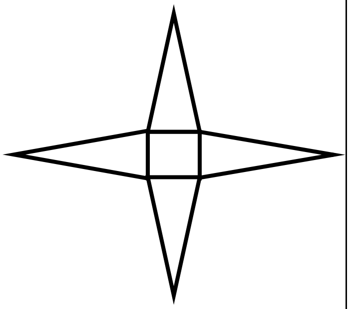
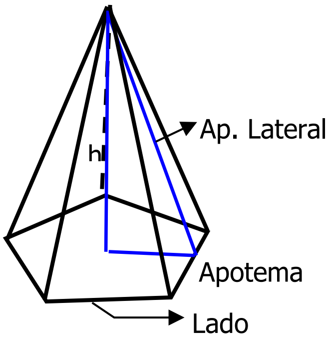
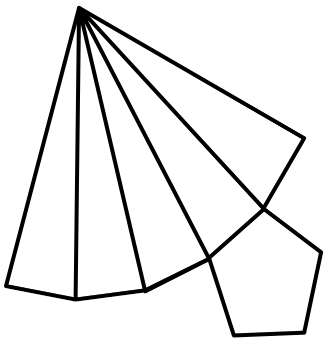
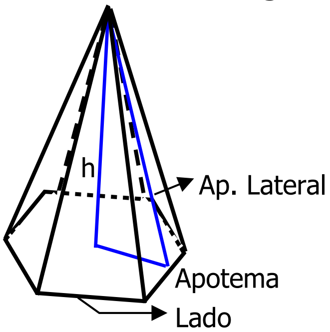
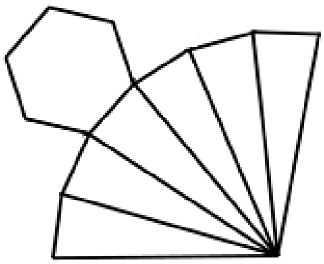
Cuerpos Redondos

Cuerpo	Desarrollo	Fórmulas
Cilindro 		$S_B = \pi . r^2$ $S_L = 2 . \pi . r . h$ $S_T = 2.S_B + S_L$ $Vol = \pi . r^2 . h$
Cono 		$S_B = \pi . r^2$ $S_L = \pi . r . g$ $S_T = S_B + S_L$ $Vol = \frac{\pi . r^2 . h}{3}$
Cono truncado 		S_B Mayor $= \pi . R^2$ S_B Menor $= \pi . r^2$ $S_L = \pi .(R + r) . g$ $S_T = S_L + S_B$ Mayor $+ S_B$ Menor $Vol = \frac{1}{3} . \pi . h. (R^2 + r^2 + R . r)$
Esfera 		$S_T = 4 . \pi . r^2$ $Vol = \frac{4 .\pi . r^3}{3}$

Prismas

Cuerpo	Desarrollo	Fórmulas
Prisma triangular 		$S_B = \frac{\text{Lado de la base . h de la base}}{2}$ $S_L = \text{Perímetro de la base . h}$ $S_T = 2.S_B + S_L$ $Vol = S_B \,.\, h$
Prisma cuadrangular 		$S_B = \text{Lado . Lado}$ $S_L = \text{Perímetro de la base . h}$ $S_T = 2.S_B + S_L$ $Vol = S_B \,.\, h$
Prisma rectangular 		$S_B = \text{Base de la base . Altura de la base}$ $S_L = \text{Perímetro de la base . h}$ $S_T = 2.S_B + S_L$ $Vol = S_B \,.\, h$
Prisma pentagonal 		$S_B = \frac{\text{Perímetro de base . Apotema}}{2}$ $S_L = \text{Perímetro de la base . h}$ $S_T = 2.S_B + S_L$ $Vol = S_B \,.\, h$
Prisma hexagonal 		$S_B = \frac{\text{Perímetro de base . Apotema}}{2}$ $S_L = \text{Perímetro de la base . h}$ $S_T = 2.S_B + S_L$ $Vol = S_B \,.\, h$
Cubo 		$S_T = 6 \,.\, A^2$ $Vol = A^3$

Pirámides

Cuerpo	Desarrollo	Fórmulas
Pirámide triangular  		$S_B = \dfrac{\text{Perímetro de base . Apotema}}{2}$ $S_L = \dfrac{\text{Perímetro de base. Ap Lateral}}{2}$ $S_T = S_B + S_L$ $\text{Vol} = \dfrac{S_B \cdot h}{3}$
Pirámide cuadrangular  		$S_B = \text{Lado . Lado}$ $S_L = \dfrac{\text{Perímetro de base. Ap Lateral}}{2}$ $S_T = S_B + S_L$ $\text{Vol} = \dfrac{S_B \cdot h}{3}$
Pirámide pentagonal  		$S_B = \dfrac{\text{Perímetro de base . Apotema}}{2}$ $S_L = \dfrac{\text{Perímetro de base. Ap Lateral}}{2}$ $S_T = S_B + S_L$ $\text{Vol} = \dfrac{S_B \cdot h}{3}$
Pirámide hexagonal  		$S_B = \dfrac{\text{Perímetro de base . Apotema}}{2}$ $S_L = \dfrac{\text{Perímetro de base. Ap Lateral}}{2}$ $S_T = S_B + S_L$ $\text{Vol} = \dfrac{S_B \cdot h}{3}$

Polinomios

Factorización de polinomios

- **Factor Común:** A veces sucede que en un polinomio P(x) la variable **x** figura en todos los términos. En este caso es muy conveniente *extraer factor común*. También se puede extraer un número que es factor de todos los coeficientes. Después se divide cada término del polinomio por el factor común**.**

  Ejemplo: $Q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2$ en este caso se repite la variable x y todos los coeficientes son múltiplos de 2, o sea que 2 es factor de todos los coeficientes. Por lo tanto, podemos extraer $2x^2$ y nos queda:
  $\mathbf{Q(x) = 2x^2.(x^2 - 3x + 2).}$

- **Trinomio Cuadrado Perfecto:** Para que un polinomio sea un *trinomio cuadrado perfecto*, es necesario que sea de grado par y que tenga la misma estructura que el trinomio $\mathbf{a^2 + 2.a.b + b^2 = (a + b)^2}$.
  Ejemplo: $P(x) = 9x^2 + 30x + 25 = \mathbf{(3x + 5)^2}$.

- **Diferencia de cuadrados:** Para factorizar un polinomio por este método, el polinomio debe tener sólo dos términos, y cada uno de ellos debe ser el cuadrado de algún número o variable. Además, los dos términos deben estar separados por el "signo menos". De forma general se puede escribir: $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)}$.
  Ejemplo: $P(x) = x^2 - 4 = \mathbf{(x + 2).(x - 2)}$

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita o cuadráticas

Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas son aquellas en las que la variable está elevada al cuadrado.
De manera general podemos decir que una ecuación cuadrática es del tipo:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

y se puede resolver utilizando la **fórmula de Bhaskara**, más conocida como la fórmula de la resolvente o fórmula de la cuadrática:

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}}$$

Tipos de solución de una ecuación cuadrática:

Análisis Del Determinante: $\Delta = b^2 - 4.a.c$

- $\Delta > 0$ En este caso, tendremos dos soluciones
  $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$

- $\Delta = 0$ En este caso, las dos soluciones dadas por la fórmula cuadrática coinciden, y diremos que tenemos una solución doble; o también, dos soluciones repetidas.
  Ej: $x^2 + 4x + 4 = 0$

- $\Delta < 0$ En este caso, no hay soluciones, pues la expresión dentro del radical contiene una expresión negativa.
  Ej: $x^2 + 4x + 5 = 0$

Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática

Si $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son las raíces de una ecuación cuadrática de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, entonces:

- $\mathbf{x_1 + x_2} = -\frac{b}{a}$ y $\mathbf{x_1 \,.\, x_2} = \frac{c}{a}$

Ejemplo: La ecuación cuadrática $3x^2 + 6x - 45 = 0$, tiene como soluciones o raíces $x_1 = 3$ y $x_2 = -5$. Entonces:

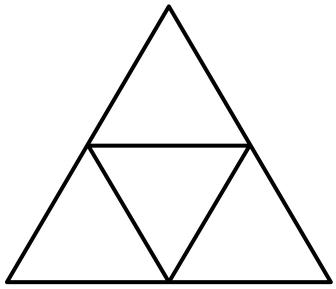
- $x_1 + x_2 = 3 + (-5) = -2$ que es igual a $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{3} = -2$.
- $x_1 \,.\, x_2 = 3 \,.\, (-5) = -15$ que es igual a $\frac{c}{a} = \frac{-45}{3} = -15$.

Particularmente, si a = 1, $\mathbf{x_1 + x_2 = -b}$ y $\mathbf{x_1 \,.\, x_2 = c}$

El principio del palomar

El principio del palomar dice lo siguiente: ***si hay más palomas que palomares, alguno de los palomares deberá contener por lo menos dos palomas*.**
Este es un principio muy sencillo de formular y que no necesita demostrarse de lo obvio que es. A pesar de su sencillez, el principio del palomar es al mismo tiempo una herramienta muy potente.

Ejemplo 1: *En cualquier teatro con capacidad para 750 personas o más y que esté lleno, existen dos personas del público tales que su primera y su última letra son iguales (como, por ejemplo, Mariano y Martino, o Solange y Salomé).*
El teatro tendrá por ejemplo, 800 personas, que van a ser nuestras palomas, mientras que los pares formados por la primera y última letra de un nombre (en los ejemplos anteriores (m,o), de Mariano y Martino, y (s,e), de Solange y Salomé), nuestros palomares. Puesto que hay 27 letras en el alfabeto, entonces hay 27 x 27 = 729 pares de letras posibles, desde la (a,a) hasta la (z,z). Como hay más palomas (personas) que palomares (pares de letras), entonces al menos dos personas deberán compartir la primera y la última letra de su nombre.



Ejemplo 2: *Dados 5 puntos cualesquiera dentro de un triángulo equilátero de lado 2, al menos dos de ellos están a una distancia, el uno del otro, menor que 1.*
Está claro que por estar dentro de un triángulo equilátero de lado 2, cualesquiera dos puntos, de los cinco que hemos elegido, están a una distancia menor que 2, pero ¿podemos afirmar que siempre habrá dos de ellos que estén a una distancia menor que 1?
Para aplicar el principio del palomar se consideran los puntos medios de los lados del triángulo y se unen con segmentos, lo cual divide al triángulo en cuatro triangulitos equiláteros de lado 1. Como son cuatro triángulos de lado 1 (que serán nuestros palomares) y cinco puntos (que serán nuestras palomas), entonces habrá dos puntos en el mismo triángulo equilátero de lado 1, y esos dos están a una distancia menor que 1.

Ejemplo 3: *Consideremos un conjunto arbitrario de 12 números, entonces existen al menos dos cuya diferencia es divisible por 11.*
¿Cómo utilizar el principio para demostrar este resultado? Cuando dividimos un número cualquiera entre otro, en este caso nos interesa dividir por 11, entonces obtenemos el divisor y el resto. Así, si dividimos el número 357 entre 11 nos da 32 (el dividendo), pero nos sobran 5 (que es el resto).
Por lo tanto, 357 = 11 x 32 + 5. Se dice que 357 es congruente con 5, módulo 11, y se expresa $357 \equiv 5$ (mod 11).
Para aplicar el principio del palomar, vamos a distribuir nuestras palomas (que serán los 12 números arbitrarios que se han tomado) en los siguientes palomares…
P1 = conjunto de números tales que al dividir por 11 queda de resto 0 (los números congruentes con 0, módulo 11),
P2 = conjunto de números tales que al dividir por 11 queda de resto 1 (los números congruentes con 1, módulo 46),
…
P11 = conjunto de números tales que al dividir por 11 queda de resto 10 (los números congruentes con 10, módulo 11).
En consecuencia, habrá por lo menos dos palomas, es decir, dos números del conjunto de 12 que habíamos elegido arbitrariamente, compartiendo palomar, es decir, que tienen el mismo resto al dividir por 11.
Esos dos números se podrán escribir, como antes hemos hecho con el número 357, de la forma, 357 = 11 x 32 + 5, con distintos divisores, pero el mismo resto. Al restar ambos números, como los dos tienen el mismo resto, el resultado quedará múltiplo de 11, y se concluye el resultado.

Ejemplo 4: *En una fiesta cualquiera hay por lo menos dos personas con el mismo número de amigos.*
Supongamos que, a una fiesta, o reunión de cualquier tipo, han asistido *n* personas, bueno para que no parezca tan abstracto, pensemos que han sido 32 personas. Podríamos distinguir dos casos:
A. Si todas las personas de la reunión tienen al menos un amigo, cada una de esas 32 personas (que van a ser ahora nuestras palomas) pueden tener entre 1, ya que todas tienen al menos un amigo, y 31 amigos, ya que suponemos que "cada persona no es amiga de sí misma" (las cantidades de amigos son ahora los palomares), entonces aplicando el principio del palomar existen dos personas con el mismo número de amigos.
B. Pero si hubiese algunas personas en la fiesta que no tienen ningún amigo, razonaremos como antes, aunque sin tener en cuenta a las personas "solitarias". Por ejemplo, si de las 32 que están en la fiesta, 7 no tienen amigos, se hace el razonamiento anterior con las 25 personas restantes, que ahora pueden tener entre 1 y 24 amigos.

ANEXO

Primeros Números Primos Desde 2 hasta 51157 (Hoja 1 - Desde 2 hasta 7919)

2 3 5 7 11 13 17 19 23	2381 2383 2389 2393 2399 2411	5059 5077 5081 5087 5099 5101
29 31 37 41 43 47 53 59	2417 2423 2437 2441 2447 2459	5107 5113 5119 5147 5153 5167
61 67 71 73 79 83 89 97 101	2467 2473 2477 2503 2521 2531	5171 5179 5189 5197 5209 5227
103 107 109 113 127 131 137	2539 2543 2549 2551 2557 2579	5231 5233 5237 5261 5273 5279
139 149 151 157 163 167 173	2591 2593 2609 2617 2621 2633	5281 5297 5303 5309 5323 5333
179 181 191 193 197 199 211	2647 2657 2659 2663 2671 2677	5347 5351 5381 5387 5393 5399
223 227 229 233 239 241 251	2683 2687 2689 2693 2699 2707	5407 5413 5417 5419 5431 5437
257 263 269 271 277 281 283	2711 2713 2719 2729 2731 2741	5441 5443 5449 5471 5477 5479
293 307 311 313 317 331 337	2749 2753 2767 2777 2789 2791	5483 5501 5503 5507 5519 5521
347 349 353 359 367 373 379	2797 2801 2803 2819 2833 2837	5527 5531 5557 5563 5569 5573
383 389 397 401 409 419 421	2843 2851 2857 2861 2879 2887	5581 5591 5623 5639 5641 5647
431 433 439 443 449 457 461	2897 2903 2909 2917 2927 2939	5651 5653 5657 5659 5669 5683
463 467 479 487 491 499 503	2953 2957 2963 2969 2971 2999	5689 5693 5701 5711 5717 5737
509 521 523 541 547 557 563	3001 3011 3019 3023 3037 3041	5741 5743 5749 5779 5783 5791
569 571 577 587 593 599 601	3049 3061 3067 3079 3083 3089	5801 5807 5813 5821 5827 5839
607 613 617 619 631 641 643	3109 3119 3121 3137 3163 3167	5843 5849 5851 5857 5861 5867
647 653 659 661 673 677 683	3169 3181 3187 3191 3203 3209	5869 5879 5881 5897 5903 5923
691 701 709 719 727 733 739	3217 3221 3229 3251 3253 3257	5927 5939 5953 5981 5987 6007
743 751 757 761 769 773 787	3259 3271 3299 3301 3307 3313	6011 6029 6037 6043 6047 6053
797 809 811 821 823 827 829	3319 3323 3329 3331 3343 3347	6067 6073 6079 6089 6091 6101
839 853 857 859 863 877 881	3359 3361 3371 3373 3389 3391	6113 6121 6131 6133 6143 6151
883 887 907 911 919 929 937	3407 3413 3433 3449 3457 3461	6163 6173 6197 6199 6203 6211
941 947 953 967 971 977 983	3463 3467 3469 3491 3499 3511	6217 6221 6229 6247 6257 6263
991 997 1009 1013 1019 1021	3517 3527 3529 3533 3539 3541	6269 6271 6277 6287 6299 6301
1031 1033 1039 1049 1051 1061	3547 3557 3559 3571 3581 3583	6311 6317 6323 6329 6337 6343
1063 1069 1087 1091 1093 1097	3593 3607 3613 3617 3623 3631	6353 6359 6361 6367 6373 6379
1103 1109 1117 1123 1129 1151	3637 3643 3659 3671 3673 3677	6389 6397 6421 6427 6449 6451
1153 1163 1171 1181 1187 1193	3691 3697 3701 3709 3719 3727	6469 6473 6481 6491 6521 6529
1201 1213 1217 1223 1229 1231	3733 3739 3761 3767 3769 3779	6547 6551 6553 6563 6569 6571
1237 1249 1259 1277 1279 1283	3793 3797 3803 3821 3823 3833	6577 6581 6599 6607 6619 6637
1289 1291 1297 1301 1303 1307	3847 3851 3853 3863 3877 3881	6653 6659 6661 6673 6679 6689
1319 1321 1327 1361 1367 1373	3889 3907 3911 3917 3919 3923	6691 6701 6703 6709 6719 6733
1381 1399 1409 1423 1427 1429	3929 3931 3943 3947 3967 3989	6737 6761 6763 6779 6781 6791
1433 1439 1447 1451 1453 1459	4001 4003 4007 4013 4019 4021	6793 6803 6823 6827 6829 6833
1471 1481 1483 1487 1489 1493	4027 4049 4051 4057 4073 4079	6841 6857 6863 6869 6871 6883
1499 1511 1523 1531 1543 1549	4091 4093 4099 4111 4127 4129	6899 6907 6911 6917 6947 6949
1553 1559 1567 1571 1579 1583	4133 4139 4153 4157 4159 4177	6959 6961 6967 6971 6977 6983
1597 1601 1607 1609 1613 1619	4201 4211 4217 4219 4229 4231	6991 6997 7001 7013 7019 7027
1621 1627 1637 1657 1663 1667	4241 4243 4253 4259 4261 4271	7039 7043 7057 7069 7079 7103
1669 1693 1697 1699 1709 1721	4273 4283 4289 4297 4327 4337	7109 7121 7127 7129 7151 7159
1723 1733 1741 1747 1753 1759	4339 4349 4357 4363 4373 4391	7177 7187 7193 7207 7211 7213
1777 1783 1787 1789 1801 1811	4397 4409 4421 4423 4441 4447	7219 7229 7237 7243 7247 7253
1823 1831 1847 1861 1867 1871	4451 4457 4463 4481 4483 4493	7283 7297 7307 7309 7321 7331
1873 1877 1879 1889 1901 1907	4507 4513 4517 4519 4523 4547	7333 7349 7351 7369 7393 7411
1913 1931 1933 1949 1951 1973	4549 4561 4567 4583 4591 4597	7417 7433 7451 7457 7459 7477
1979 1987 1993 1997 1999 2003	4603 4621 4637 4639 4643 4649	7481 7487 7489 7499 7507 7517
2011 2017 2027 2029 2039 2053	4651 4657 4663 4673 4679 4691	7523 7529 7537 7541 7547 7549
2063 2069 2081 2083 2087 2089	4703 4721 4723 4729 4733 4751	7559 7561 7573 7577 7583 7589
2099 2111 2113 2129 2131 2137	4759 4783 4787 4789 4793 4799	7591 7603 7607 7621 7639 7643
2141 2143 2153 2161 2179 2203	4801 4813 4817 4831 4861 4871	7649 7669 7673 7681 7687 7691
2207 2213 2221 2237 2239 2243	4877 4889 4903 4909 4919 4931	7699 7703 7717 7723 7727 7741
2251 2267 2269 2273 2281 2287	4933 4937 4943 4951 4957 4967	7753 7757 7759 7789 7793 7817
2293 2297 2309 2311 2333 2339	4969 4973 4987 4993 4999 5003	7823 7829 7841 7853 7867 7873
2341 2347 2351 2357 2371 2377	5009 5011 5021 5023 5039 5051	7877 7879 7883 7901 7907 7919

7927 7933 7937 7949 7951 7963	10853 10859 10861 10867 10883	13487 13499 13513 13523 13537
7993 8009 8011 8017 8039 8053	10889 10891 10903 10909 10937	13553 13567 13577 13591 13597
8059 8069 8081 8087 8089 8093	10939 10949 10957 10973 10979	13613 13619 13627 13633 13649
8101 8111 8117 8123 8147 8161	10987 10993 11003 11027 11047	13669 13679 13681 13687 13691
8167 8171 8179 8191 8209 8219	11057 11059 11069 11071 11083	13693 13697 13709 13711 13721
8221 8231 8233 8237 8243 8263	11087 11093 11113 11117 11119	13723 13729 13751 13757 13759
8269 8273 8287 8291 8293 8297	11131 11149 11159 11161 11171	13763 13781 13789 13799 13807
8311 8317 8329 8353 8363 8369	11173 11177 11197 11213 11239	13829 13831 13841 13859 13873
8377 8387 8389 8419 8423 8429	11243 11251 11257 11261 11273	13877 13879 13883 13901 13903
8431 8443 8447 8461 8467 8501	11279 11287 11299 11311 11317	13907 13913 13921 13931 13933
8513 8521 8527 8537 8539 8543	11321 11329 11351 11353 11369	13963 13967 13997 13999 14009
8563 8573 8581 8597 8599 8609	11383 11393 11399 11411 11423	14011 14029 14033 14051 14057
8623 8627 8629 8641 8647 8663	11437 11443 11447 11467 11471	14071 14081 14083 14087 14107
8669 8677 8681 8689 8693 8699	11483 11489 11491 11497 11503	14143 14149 14153 14159 14173
8707 8713 8719 8731 8737 8741	11519 11527 11549 11551 11579	14177 14197 14207 14221 14243
8747 8753 8761 8779 8783 8803	11587 11593 11597 11617 11621	14249 14251 14281 14293 14303
8807 8819 8821 8831 8837 8839	11633 11657 11677 11681 11689	14321 14323 14327 14341 14347
8849 8861 8863 8867 8887 8893	11699 11701 11717 11719 11731	14369 14387 14389 14401 14407
8923 8929 8933 8941 8951 8963	11743 11777 11779 11783 11789	14411 14419 14423 14431 14437
8969 8971 8999 9001 9007 9011	11801 11807 11813 11821 11827	14447 14449 14461 14479 14489
9013 9029 9041 9043 9049 9059	11831 11833 11839 11863 11867	14503 14519 14533 14537 14543
9067 9091 9103 9109 9127 9133	11887 11897 11903 11909 11923	14549 14551 14557 14561 14563
9137 9151 9157 9161 9173 9181	11927 11933 11939 11941 11953	14591 14593 14621 14627 14629
9187 9199 9203 9209 9221 9227	11959 11969 11971 11981 11987	14633 14639 14653 14657 14669
9239 9241 9257 9277 9281 9283	12007 12011 12037 12041 12043	14683 14699 14713 14717 14723
9293 9311 9319 9323 9337 9341	12049 12071 12073 12097 12101	14731 14737 14741 14747 14753
9343 9349 9371 9377 9391 9397	12107 12109 12113 12119 12143	14759 14767 14771 14779 14783
9403 9413 9419 9421 9431 9433	12149 12157 12161 12163 12197	14797 14813 14821 14827 14831
9437 9439 9461 9463 9467 9473	12203 12211 12227 12239 12241	14843 14851 14867 14869 14879
9479 9491 9497 9511 9521 9533	12251 12253 12263 12269 12277	14887 14891 14897 14923 14929
9539 9547 9551 9587 9601 9613	12281 12289 12301 12323 12329	14939 14947 14951 14957 14969
9619 9623 9629 9631 9643 9649	12343 12347 12373 12377 12379	14983 15013 15017 15031 15053
9661 9677 9679 9689 9697 9719	12391 12401 12409 12413 12421	15061 15073 15077 15083 15091
9721 9733 9739 9743 9749 9767	12433 12437 12451 12457 12473	15101 15107 15121 15131 15137
9769 9781 9787 9791 9803 9811	12479 12487 12491 12497 12503	15139 15149 15161 15173 15187
9817 9829 9833 9839 9851 9857	12511 12517 12527 12539 12541	15193 15199 15217 15227 15233
9859 9871 9883 9887 9901 9907	12547 12553 12569 12577 12583	15241 15259 15263 15269 15271
9923 9929 9931 9941 9949 9967	12589 12601 12611 12613 12619	15277 15287 15289 15299 15307
9973 10007 10009 10037 10039	12637 12641 12647 12653 12659	15313 15319 15329 15331 15349
10061 10067 10069 10079 10091	12671 12689 12697 12703 12713	15359 15361 15373 15377 15383
10093 10099 10103 10111 10133	12721 12739 12743 12757 12763	15391 15401 15413 15427 15439
10139 10141 10151 10159 10163	12781 12791 12799 12809 12821	15443 15451 15461 15467 15473
10169 10177 10181 10193 10211	12823 12829 12841 12853 12889	15493 15497 15511 15527 15541
10223 10243 10247 10253 10259	12893 12899 12907 12911 12917	15551 15559 15569 15581 15583
10267 10271 10273 10289 10301	12919 12923 12941 12953 12959	15601 15607 15619 15629 15641
10303 10313 10321 10331 10333	12967 12973 12979 12983 13001	15643 15647 15649 15661 15667
10337 10343 10357 10369 10391	13003 13007 13009 13033 13037	15671 15679 15683 15727 15731
10399 10427 10429 10433 10453	13043 13049 13063 13093 13099	15733 15737 15739 15749 15761
10457 10459 10463 10477 10487	13103 13109 13121 13127 13147	15767 15773 15787 15791 15797
10499 10501 10513 10529 10531	13151 13159 13163 13171 13177	15803 15809 15817 15823 15859
10559 10567 10589 10597 10601	13183 13187 13217 13219 13229	15877 15881 15887 15889 15901
10607 10613 10627 10631 10639	13241 13249 13259 13267 13291	15907 15913 15919 15923 15937
10651 10657 10663 10667 10687	13297 13309 13313 13327 13331	15959 15971 15973 15991 16001
10691 10709 10711 10723 10729	13337 13339 13367 13381 13397	16007 16033 16057 16061 16063
10733 10739 10753 10771 10781	13399 13411 13417 13421 13441	16067 16069 16073 16087 16091
10789 10799 10831 10837 10847	13451 13457 13463 13469 13477	16097 16103 16111 16127 16139

Números Primos (Hoja 3 - Desde 16141 hasta 24499)

16141	16183	16187	16189	16193
16217	16223	16229	16231	16249
16253	16267	16273	16301	16319
16333	16339	16349	16361	16363
16369	16381	16411	16417	16421
16427	16433	16447	16451	16453
16477	16481	16487	16493	16519
16529	16547	16553	16561	16567
16573	16603	16607	16619	16631
16633	16649	16651	16657	16661
16673	16691	16693	16699	16703
16729	16741	16747	16759	16763
16787	16811	16823	16829	16831
16843	16871	16879	16883	16889
16901	16903	16921	16927	16931
16937	16943	16963	16979	16981
16987	16993	17011	17021	17027
17029	17033	17041	17047	17053
17077	17093	17099	17107	17117
17123	17137	17159	17167	17183
17189	17191	17203	17207	17209
17231	17239	17257	17291	17293
17299	17317	17321	17327	17333
17341	17351	17359	17377	17383
17387	17389	17393	17401	17417
17419	17431	17443	17449	17467
17471	17477	17483	17489	17491
17497	17509	17519	17539	17551
17569	17573	17579	17581	17597
17599	17609	17623	17627	17657
17659	17669	17681	17683	17707
17713	17729	17737	17747	17749
17761	17783	17789	17791	17807
17827	17837	17839	17851	17863
17881	17891	17903	17909	17911
17921	17923	17929	17939	17957
17959	17971	17977	17981	17987
17989	18013	18041	18043	18047
18049	18059	18061	18077	18089
18097	18119	18121	18127	18131
18133	18143	18149	18169	18181
18191	18199	18211	18217	18223
18229	18233	18251	18253	18257
18269	18287	18289	18301	18307
18311	18313	18329	18341	18353
18367	18371	18379	18397	18401
18413	18427	18433	18439	18443
18451	18457	18461	18481	18493
18503	18517	18521	18523	18539
18541	18553	18583	18587	18593
18617	18637	18661	18671	18679
18691	18701	18713	18719	18731
18743	18749	18757	18773	18787
18793	18797	18803	18839	18859
18869	18899	18911	18913	18917
18919	18947	18959	18973	18979

19001	19009	19013	19031	19037
19051	19069	19073	19079	19081
19087	19121	19139	19141	19157
19163	19181	19183	19207	19211
19213	19219	19231	19237	19249
19259	19267	19273	19289	19301
19309	19319	19333	19373	19379
19381	19387	19391	19403	19417
19421	19423	19427	19429	19433
19441	19447	19457	19463	19469
19471	19477	19483	19489	19501
19507	19531	19541	19543	19553
19559	19571	19577	19583	19597
19603	19609	19661	19681	19687
19697	19699	19709	19717	19727
19739	19751	19753	19759	19763
19777	19793	19801	19813	19819
19841	19843	19853	19861	19867
19889	19891	19913	19919	19927
19937	19949	19961	19963	19973
19979	19991	19993	19997	20011
20021	20023	20029	20047	20051
20063	20071	20089	20101	20107
20113	20117	20123	20129	20143
20147	20149	20161	20173	20177
20183	20201	20219	20231	20233
20249	20261	20269	20287	20297
20323	20327	20333	20341	20347
20353	20357	20359	20369	20389
20393	20399	20407	20411	20431
20441	20443	20477	20479	20483
20507	20509	20521	20533	20543
20549	20551	20563	20593	20599
20611	20627	20639	20641	20663
20681	20693	20707	20717	20719
20731	20743	20747	20749	20753
20759	20771	20773	20789	20807
20809	20849	20857	20873	20879
20887	20897	20899	20903	20921
20929	20939	20947	20959	20963
20981	20983	21001	21011	21013
21017	21019	21023	21031	21059
21061	21067	21089	21101	21107
21121	21139	21143	21149	21157
21163	21169	21179	21187	21191
21193	21211	21221	21227	21247
21269	21277	21283	21313	21317
21319	21323	21341	21347	21377
21379	21383	21391	21397	21401
21407	21419	21433	21467	21481
21487	21491	21493	21499	21503
21517	21521	21523	21529	21557
21559	21563	21569	21577	21587
21589	21599	21601	21611	21613
21617	21647	21649	21661	21673
21683	21701	21713	21727	21737

21739	21751	21757	21767	21773
21787	21799	21803	21817	21821
21839	21841	21851	21859	21863
21871	21881	21893	21911	21929
21937	21943	21961	21977	21991
21997	22003	22013	22027	22031
22037	22039	22051	22063	22067
22073	22079	22091	22093	22109
22111	22123	22129	22133	22147
22153	22157	22159	22171	22189
22193	22229	22247	22259	22271
22273	22277	22279	22283	22291
22303	22307	22343	22349	22367
22369	22381	22391	22397	22409
22433	22441	22447	22453	22469
22481	22483	22501	22511	22531
22541	22543	22549	22567	22571
22573	22613	22619	22621	22637
22639	22643	22651	22669	22679
22691	22697	22699	22709	22717
22721	22727	22739	22741	22751
22769	22777	22783	22787	22807
22811	22817	22853	22859	22861
22871	22877	22901	22907	22921
22937	22943	22961	22963	22973
22993	23003	23011	23017	23021
23027	23029	23039	23041	23053
23057	23059	23063	23071	23081
23087	23099	23117	23131	23143
23159	23167	23173	23189	23197
23201	23203	23209	23227	23251
23269	23279	23291	23293	23297
23311	23321	23327	23333	23339
23357	23369	23371	23399	23417
23431	23447	23459	23473	23497
23509	23531	23537	23539	23549
23557	23561	23563	23567	23581
23593	23599	23603	23609	23623
23627	23629	23633	23663	23669
23671	23677	23687	23689	23719
23741	23743	23747	23753	23761
23767	23773	23789	23801	23813
23819	23827	23831	23833	23857
23869	23873	23879	23887	23893
23899	23909	23911	23917	23929
23957	23971	23977	23981	23993
24001	24007	24019	24023	24029
24043	24049	24061	24071	24077
24083	24091	24097	24103	24107
24109	24113	24121	24133	24137
24151	24169	24179	24181	24197
24203	24223	24229	24239	24247
24251	24281	24317	24329	24337
24359	24371	24373	24379	24391
24407	24413	24419	24421	24439
24443	24469	24473	24481	24499

Números Primos (Hoja 4 - Desde 24509 hasta 33179)

24509	24517	24527	24533	24547
24551	24571	24593	24611	24623
24631	24659	24671	24677	24683
24691	24697	24709	24733	24749
24763	24767	24781	24793	24799
24809	24821	24841	24847	24851
24859	24877	24889	24907	24917
24919	24923	24943	24953	24967
24971	24977	24979	24989	25013
25031	25033	25037	25057	25073
25087	25097	25111	25117	25121
25127	25147	25153	25163	25169
25171	25183	25189	25219	25229
25237	25243	25247	25253	25261
25301	25303	25307	25309	25321
25339	25343	25349	25357	25367
25373	25391	25409	25411	25423
25439	25447	25453	25457	25463
25469	25471	25523	25537	25541
25561	25577	25579	25583	25589
25601	25603	25609	25621	25633
25639	25643	25657	25667	25673
25679	25693	25703	25717	25733
25741	25747	25759	25763	25771
25793	25799	25801	25819	25841
25847	25849	25867	25873	25889
25903	25913	25919	25931	25933
25939	25943	25951	25969	25981
25997	25999	26003	26017	26021
26029	26041	26053	26083	26099
26107	26111	26113	26119	26141
26153	26161	26171	26177	26183
26189	26203	26209	26227	26237
26249	26251	26261	26263	26267
26293	26297	26309	26317	26321
26339	26347	26357	26371	26387
26393	26399	26407	26417	26423
26431	26437	26449	26459	26479
26489	26497	26501	26513	26539
26557	26561	26573	26591	26597
26627	26633	26641	26647	26669
26681	26683	26687	26693	26699
26701	26711	26713	26717	26723
26729	26731	26737	26759	26777
26783	26801	26813	26821	26833
26839	26849	26861	26863	26879
26881	26891	26893	26903	26921
26927	26947	26951	26953	26959
26981	26987	26993	27011	27017
27031	27043	27059	27061	27067
27073	27077	27091	27103	27107
27109	27127	27143	27179	27191
27197	27211	27239	27241	27253
27259	27271	27277	27281	27283
27299	27329	27337	27361	27367
27397	27407	27409	27427	27431

27437	27449	27457	27479	27481
27487	27509	27527	27529	27539
27541	27551	27581	27583	27611
27617	27631	27647	27653	27673
27689	27691	27697	27701	27733
27737	27739	27743	27749	27751
27763	27767	27773	27779	27791
27793	27799	27803	27809	27817
27823	27827	27847	27851	27883
27893	27901	27917	27919	27941
27943	27947	27953	27961	27967
27983	27997	28001	28019	28027
28031	28051	28057	28069	28081
28087	28097	28099	28109	28111
28123	28151	28163	28181	28183
28201	28211	28219	28229	28277
28279	28283	28289	28297	28307
28309	28319	28349	28351	28387
28393	28403	28409	28411	28429
28433	28439	28447	28463	28477
28493	28499	28513	28517	28537
28541	28547	28549	28559	28571
28573	28579	28591	28597	28603
28607	28619	28621	28627	28631
28643	28649	28657	28661	28663
28669	28687	28697	28703	28711
28723	28729	28751	28753	28759
28771	28789	28793	28807	28813
28817	28837	28843	28859	28867
28871	28879	28901	28909	28921
28927	28933	28949	28961	28979
29009	29017	29021	29023	29027
29033	29059	29063	29077	29101
29123	29129	29131	29137	29147
29153	29167	29173	29179	29191
29201	29207	29209	29221	29231
29243	29251	29269	29287	29297
29303	29311	29327	29333	29339
29347	29363	29383	29387	29389
29399	29401	29411	29423	29429
29437	29443	29453	29473	29483
29501	29527	29531	29537	29567
29569	29573	29581	29587	29599
29611	29629	29633	29641	29663
29669	29671	29683	29717	29723
29741	29753	29759	29761	29789
29803	29819	29833	29837	29851
29863	29867	29873	29879	29881
29917	29921	29927	29947	29959
29983	29989	30011	30013	30029
30047	30059	30071	30089	30091
30097	30103	30109	30113	30119
30133	30137	30139	30161	30169
30181	30187	30197	30203	30211
30223	30241	30253	30259	30269
30271	30293	30307	30313	30319

30323	30341	30347	30367	30389
30391	30403	30427	30431	30449
30467	30469	30491	30493	30497
30509	30517	30529	30539	30553
30557	30559			
30577	30593	30631	30637	30643
30649	30661	30671	30677	30689
30697	30703	30707	30713	30727
30757	30763	30773	30781	30803
30809	30817	30829	30839	30841
30851	30853	30859	30869	30871
30881	30893	30911	30931	30937
30941	30949	30971	30977	30983
31013	31019	31033	31039	31051
31063	31069	31079	31081	31091
31121	31123	31139	31147	31151
31153	31159	31177	31181	31183
31189	31193	31219	31223	31231
31237	31247	31249	31253	31259
31267	31271	31277	31307	31319
31321	31327	31333	31337	31357
31379	31387	31391	31393	31397
31469	31477	31481	31489	31511
31513	31517	31531	31541	31543
31547	31567	31573	31583	31601
31607	31627	31643	31649	31657
31663	31667	31687	31699	31721
31723	31727	31729	31741	31751
31769	31771	31793	31799	31817
31847	31849	31859	31873	31883
31891	31907	31957	31963	31973
31981	31991	32003	32009	32027
32029	32051	32057	32059	32063
32069	32077	32083	32089	32099
32117	32119	32141	32143	32159
32173	32183	32189	32191	32203
32213	32233	32237	32251	32257
32261	32297	32299	32303	32309
32321	32323	32327	32341	32353
32359	32363	32369	32371	32377
32381	32401	32411	32413	32423
32429	32441	32443	32467	32479
32491	32497	32503	32507	32531
32533	32537	32561	32563	32569
32573	32579	32587	32603	32609
32611	32621	32633	32647	32653
32687	32693	32707	32713	32717
32719	32749	32771	32779	32783
32789	32797	32801	32803	32831
32833	32839	32843	32869	32887
32909	32911	32917	32933	32939
32941	32957	32969	32971	32983
32987	32993	32999	33013	33023
33029	33037	33049	33053	33071
33073	33083	33091	33107	33113
33119	33149	33151	33161	33179

Números Primos (Hoja 5 - Desde 33181 hasta 42019)

33181	33191	33199	33203	33211	36109	36131	36137	36151	36161	39103	39107	39113	39119	39133
33223	33247	33287	33289	33301	36187	36191	36209	36217	36229	39139	39157	39161	39163	39181
33311	33317	33329	33331	33343	36241	36251	36263	36269	36277	39191	39199	39209	39217	39227
33347	33349	33353	33359	33377	36293	36299	36307	36313	36319	39229	39233	39239	39241	39251
33391	33403	33409	33413	33427	36341	36343	36353	36373	36383	39293	39301	39313	39317	39323
33457	33461	33469	33479	33487	36389	36433	36451	36457	36467	39341	39343	39359	39367	39371
33493	33503	33521	33529	33533	36469	36473	36479	36493	36497	39373	39383	39397	39409	39419
33547	33563	33569	33577	33581	36523	36527	36529	36541	36551	39439	39443	39451	39461	39499
33587	33589	33599	33601	33613	36559	36563	36571	36583	36587	39503	39509	39511	39521	39541
33617	33619	33623	33629	33637	36599	36607	36629	36637	36643	39551	39563	39569	39581	39607
33641	33647	33679	33703	33713	36653	36671	36677	36683	36691	39619	39623	39631	39659	39667
33721	33739	33749	33751	33757	36697	36709	36713	36721	36739	39671	39679	39703	39709	39719
33767	33769	33773	33791	33797	36749	36761	36767	36779	36781	39727	39733	39749	39761	39769
33809	33811	33827	33829	33851	36787	36791	36793	36809	36821	39779	39791	39799	39821	39827
33857	33863	33871	33889	33893	36833	36847	36857	36871	36877	39829	39839	39841	39847	39857
33911	33923	33931	33937	33941	36887	36899	36901	36913	36919	39863	39869	39877	39883	39887
33961	33967	33997	34019	34031	36923	36929	36931	36943	36947	39901	39929	39937	39953	39971
34033	34039	34057	34061	34123	36973	36979	36997	37003	37013	39979	39983	39989	40009	40013
34127	34129	34141	34147	34157	37019	37021	37039	37049	37057	40031	40037	40039	40063	40087
34159	34171	34183	34211	34213	37061	37087	37097	37117	37123	40093	40099	40111	40123	40127
34217	34231	34253	34259	34261	37139	37159	37171	37181	37189	40129	40151	40153	40163	40169
34267	34273	34283	34297	34301	37199	37201	37217	37223	37243	40177	40189	40193	40213	40231
34303	34313	34319	34327	34337	37253	37273	37277	37307	37309	40237	40241	40253	40277	40283
34351	34361	34367	34369	34381	37313	37321	37337	37339	37357	40289	40343	40351	40357	40361
34403	34421	34429	34439	34457	37361	37363	37369	37379	37397	40387	40423	40427	40429	40433
34469	34471	34483	34487	34499	37409	37423	37441	37447	37463	40459	40471	40483	40487	40493
34501	34511	34513	34519	34537	37483	37489	37493	37501	37507	40499	40507	40519	40529	40531
34543	34549	34583	34589	34591	37511	37517	37529	37537	37547	40543	40559	40577	40583	40591
34603	34607	34613	34631	34649	37549	37561	37567	37571	37573	40597	40609	40627	40637	40639
34651	34667	34673	34679	34687	37579	37589	37591	37607	37619	40693	40697	40699	40709	40739
34693	34703	34721	34729	34739	37633	37643	37649	37657	37663	40751	40759	40763	40771	40787
34747	34757	34759	34763	34781	37691	37693	37699	37717	37747	40801	40813	40819	40823	40829
34807	34819	34841	34843	34847	37781	37783	37799	37811	37813	40841	40847	40849	40853	40867
34849	34871	34877	34883	34897	37831	37847	37853	37861	37871	40879	40883	40897	40903	40927
34913	34919	34939	34949	34961	37879	37889	37897	37907	37951	40933	40939	40949	40961	40973
34963	34981	35023	35027	35051	37957	37963	37967	37987	37991	40993	41011	41017	41023	41039
35053	35059	35069	35081	35083	37993	37997	38011	38039	38047	41047	41051	41057	41077	41081
35089	35099	35107	35111	35117	38053	38069	38083	38113	38119	41113	41117	41131	41141	41143
35129	35141	35149	35153	35159	38149	38153	38167	38177	38183	41149	41161	41177	41179	41183
35171	35201	35221	35227	35251	38189	38197	38201	38219	38231	41189	41201	41203	41213	41221
35257	35267	35279	35281	35291	38237	38239	38261	38273	38281	41227	41231	41233	41243	41257
35311	35317	35323	35327	35339	38287	38299	38303	38317	38321	41263	41269	41281	41299	41333
35353	35363	35381	35393	35401	38327	38329	38333	38351	38371	41341	41351	41357	41381	41387
35407	35419	35423	35437	35447	38377	38393	38431	38447	38449	41389	41399	41411	41413	41443
35449	35461	35491	35507	35509	38453	38459	38461	38501	38543	41453	41467	41479	41491	41507
35521	35527	35531	35533	35537	38557	38561	38567	38569	38593	41513	41519	41521	41539	41543
35543	35569	35573	35591	35593	38603	38609	38611	38629	38639	41549	41579	41593	41597	41603
35597	35603	35617	35671	35677	38651	38653	38669	38671	38677	41609	41611	41617	41621	41627
35729	35731	35747	35753	35759	38693	38699	38707	38711	38713	41641	41647	41651	41659	41669
35771	35797	35801	35803	35809	38723	38729	38737	38747	38749	41681	41687	41719	41729	41737
35831	35837	35839	35851	35863	38767	38783	38791	38803	38821	41759	41761	41771	41777	41801
35869	35879	35897	35899	35911	38833	38839	38851	38861	38867	41809	41813	41843	41849	41851
35923	35933	35951	35963	35969	38873	38891	38903	38917	38921	41863	41879	41887	41893	41897
35977	35983	35993	35999	36007	38923	38933	38953	38959	38971	41903	41911	41927	41941	41947
36011	36013	36017	36037	36061	38977	38993	39019	39023	39041	41953	41957	41959	41969	41981
36067	36073	36083	36097	36107	39043	39047	39079	39089	39097	41983	41999	42013	42017	42019

42023	42043	42061	42071	42073	45007	45013	45053	45061	45077	48121	48131	48157	48163	48179
42083	42089	42101	42131	42139	45083	45119	45121	45127	45131	48187	48193	48197	48221	48239
42157	42169	42179	42181	42187	45137	45139	45161	45179	45181	48247	48259	48271	48281	48299
42193	42197	42209	42221	42223	45191	45197	45233	45247	45259	48311	48313	48337	48341	48353
42227	42239	42257	42281	42283	45263	45281	45289	45293	45307	48371	48383	48397	48407	48409
42293	42299	42307	42323	42331	45317	45319	45329	45337	45341	48413	48437	48449	48463	48473
42337	42349	42359	42373	42379	45343	45361	45377	45389	45403	48479	48481	48487	48491	48497
42391	42397	42403	42407	42409	45413	45427	45433	45439	45481	48523	48527	48533	48539	48541
42433	42437	42443	42451	42457	45491	45497	45503	45523	45533	48563	48571	48589	48593	48611
42461	42463	42467	42473	42487	45541	45553	45557	45569	45587	48619	48623	48647	48649	48661
42491	42499	42509	42533	42557	45589	45599	45613	45631	45641	48673	48677	48679	48731	48733
42569	42571	42577	42589	42611	45659	45667	45673	45677	45691	48751	48757	48761	48767	48779
42641	42643	42649	42667	42677	45697	45707	45737	45751	45757	48781	48787	48799	48809	48817
42683	42689	42697	42701	42703	45763	45767	45779	45817	45821	48821	48823	48847	48857	48859
42709	42719	42727	42737	42743	45823	45827	45833	45841	45853	48869	48871	48883	48889	48907
42751	42767	42773	42787	42793	45863	45869	45887	45893	45943	48947	48953	48973	48989	48991
42797	42821	42829	42839	42841	45949	45953	45959	45971	45979	49003	49009	49019	49031	49033
42853	42859	42863	42899	42901	45989	46021	46027	46049	46051	49037	49043	49057	49069	49081
42923	42929	42937	42943	42953	46061	46073	46091	46093	46099	49103	49109	49117	49121	49123
42961	42967	42979	42989	43003	46103	46133	46141	46147	46153	49139	49157	49169	49171	49177
43013	43019	43037	43049	43051	46171	46181	46183	46187	46199	49193	49199	49201	49207	49211
43063	43067	43093	43103	43117	46219	46229	46237	46261	46271	49223	49253	49261	49277	49279
43133	43151	43159	43177	43189	46273	46279	46301	46307	46309	49297	49307	49331	49333	49339
43201	43207	43223	43237	43261	46327	46337	46349	46351	46381	49363	49367	49369	49391	49393
43271	43283	43291	43313	43319	46399	46411	46439	46441	46447	49409	49411	49417	49429	49433
43321	43331	43391	43397	43399	46451	46457	46471	46477	46489	49451	49459	49463	49477	49481
43403	43411	43427	43441	43451	46499	46507	46511	46523	46549	49499	49523	49529	49531	49537
43457	43481	43487	43499	43517	46559	46567	46573	46589	46591	49547	49549	49559	49597	49603
43541	43543	43573	43577	43579	46601	46619	46633	46639	46643	49613	49627	49633	49639	49663
43591	43597	43607	43609	43613	46649	46663	46679	46681	46687	49667	49669	49681	49697	49711
43627	43633	43649	43651	43661	46691	46703	46723	46727	46747	49727	49739	49741	49747	49757
43669	43691	43711	43717	43721	46751	46757	46769	46771	46807	49783	49787	49789	49801	49807
43753	43759	43777	43781	43783	46811	46817	46819	46829	46831	49811	49823	49831	49843	49853
43787	43789	43793	43801	43853	46853	46861	46867	46877	46889	49871	49877	49891	49919	49921
43867	43889	43891	43913	43933	46901	46919	46933	46957	46993	49927	49937	49939	49943	49957
43943	43951	43961	43963	43969	46997	47017	47041	47051	47057	49991	49993	49999	50021	50023
43973	43987	43991	43997	44017	47059	47087	47093	47111	47119	50033	50047	50051	50053	50069
44021	44027	44029	44041	44053	47123	47129	47137	47143	47147	50077	50087	50093	50101	50111
44059	44071	44087	44089	44101	47149	47161	47189	47207	47221	50119	50123	50129	50131	50147
44111	44119	44123	44129	44131	47237	47251	47269	47279	47287	50153	50159	50177	50207	50221
44159	44171	44179	44189	44201	47293	47297	47303	47309	47317	50227	50231	50261	50263	50273
44203	44207	44221	44249	44257	47339	47351	47353	47363	47381	50287	50291	50311	50321	50329
44263	44267	44269	44273	44279	47387	47389	47407	47417	47419	50333	50341	50359	50363	50377
44281	44293	44351	44357	44371	47431	47441	47459	47491	47497	50383	50387	50411	50417	50423
44381	44383	44389	44417	44449	47501	47507	47513	47521	47527	50441	50459	50461	50497	50503
44453	44483	44491	44497	44501	47533	47543	47563	47569	47581	50513	50527	50539	50543	50549
44507	44519	44531	44533	44537	47591	47599	47609	47623	47629	50551	50581	50587	50591	50593
44543	44549	44563	44579	44587	47639	47653	47657	47659	47681	50599	50627	50647	50651	50671
44617	44621	44623	44633	44641	47699	47701	47711	47713	47717	50683	50707	50723	50741	50753
44647	44651	44657	44683	44687	47737	47741	47743	47777	47779	50767	50773	50777	50789	50821
44699	44701	44711	44729	44741	47791	47797	47807	47809	47819	50833	50839	50849	50857	50867
44753	44771	44773	44777	44789	47837	47843	47857	47869	47881	50873	50891	50893	50909	50923
44797	44809	44819	44839	44843	47903	47911	47917	47933	47939	50929	50951	50957	50969	50971
44851	44867	44879	44887	44893	47947	47951	47963	47969	47977	50989	50993	51001	51031	51043
44909	44917	44927	44939	44953	47981	48017	48023	48029	48049	51047	51059	51061	51071	51109
44959	44963	44971	44983	44987	48073	48079	48091	48109	48119	51131	51133	51137	51151	51157

Primeros 1000 cuadrados perfectos (Hoja 1 - desde $1^2 = 1$ hasta $752^2 = 565.504$)

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100	91809 92416 93025 93636 94249	279841 280900 281961 283024
121 144 169 196 225 256 289	94864 95481 96100 96721 97344	284089 285156 286225 287296
324 361 400 441 484 529 576	97969 98596 99225 99856	288369 289444 290521 291600
625 676 729 784 841 900 961	100489 101124 101761 102400	292681 293764 294849 295936
1024 1089 1156 1225 1296 1369	103041 103684 104329 104976	297025 298116 299209 300304
1444 1521 1600 1681 1764 1849	105625 106276 106929 107584	301401 302500 303601 304704
1936 2025 2116 2209 2304 2401	108241 108900 109561 110224	305809 306916 308025 309136
2500 2601 2704 2809 2916 3025	110889 111556 112225 112896	310249 311364 312481 313600
3136 3249 3364 3481 3600 3721	113569 114244 114921 115600	314721 315844 316969 318096
3844 3969 4096 4225 4356 4489	116281 116964 117649 118336	319225 320356 321489 322624
4624 4761 4900 5041 5184 5329	119025 119716 120409 121104	323761 324900 326041 327184
5476 5625 5776 5929 6084 6241	121801 122500 123201 123904	328329 329476 330625 331776
6400 6561 6724 6889 7056 7225	124609 125316 126025 126736	332929 334084 335241 336400
7396 7569 7744 7921 8100 8281	127449 128164 128881 129600	337561 338724 339889 341056
8464 8649 8836 9025 9216 9409	130321 131044 131769 132496	342225 343396 344569 345744
9604 9801 10000 10201 10404	133225 133956 134689 135424	346921 348100 349281 350464
10609 10816 11025 11236 11449	136161 136900 137641 138384	351649 352836 354025 355216
11664 11881 12100 12321 12544	139129 139876 140625 141376	356409 357604 358801 360000
12769 12996 13225 13456 13689	142129 142884 143641 144400	361201 362404 363609 364816
13924 14161 14400 14641 14884	145161 145924 146689 147456	366025 367236 368449 369664
15129 15376 15625 15876 16129	148225 148996 149769 150544	370881 372100 373321 374544
16384 16641 16900 17161 17424	151321 152100 152881 153664	375769 376996 378225 379456
17689 17956 18225 18496 18769	154449 155236 156025 156816	380689 381924 383161 384400
19044 19321 19600 19881 20164	157609 158404 159201 160000	385641 386884 388129 389376
20449 20736 21025 21316 21609	160801 161604 162409 163216	390625 391876 393129 394384
21904 22201 22500 22801 23104	164025 164836 165649 166464	395641 396900 398161 399424
23409 23716 24025 24336 24649	167281 168100 168921 169744	400689 401956 403225 404496
24964 25281 25600 25921 26244	170569 171396 172225 173056	405769 407044 408321 409600
26569 26896 27225 27556 27889	173889 174724 175561 176400	410881 412164 413449 414736
28224 28561 28900 29241 29584	177241 178084 178929 179776	416025 417316 418609 419904
29929 30276 30625 30976 31329	180625 181476 182329 183184	421201 422500 423801 425104
31684 32041 32400 32761 33124	184041 184900 185761 186624	426409 427716 429025 430336
33489 33856 34225 34596 34969	187489 188356 189225 190096	431649 432964 434281 435600
35344 35721 36100 36481 36864	190969 191844 192721 193600	436921 438244 439569 440896
37249 37636 38025 38416 38809	194481 195364 196249 197136	442225 443556 444889 446224
39204 39601 40000 40401 40804	198025 198916 199809 200704	447561 448900 450241 451584
41209 41616 42025 42436 42849	201601 202500 203401 204304	452929 454276 455625 456976
43264 43681 44100 44521 44944	205209 206116 207025 207936	458329 459684 461041 462400
45369 45796 46225 46656 47089	208849 209764 210681 211600	463761 465124 466489 467856
47524 47961 48400 48841 49284	212521 213444 214369 215296	469225 470596 471969 473344
49729 50176 50625 51076 51529	216225 217156 218089 219024	474721 476100 477481 478864
51984 52441 52900 53361 53824	219961 220900 221841 222784	480249 481636 483025 484416
54289 54756 55225 55696 56169	223729 224676 225625 226576	485809 487204 488601 490000
56644 57121 57600 58081 58564	227529 228484 229441 230400	491401 492804 494209 495616
59049 59536 60025 60516 61009	231361 232324 233289 234256	497025 498436 499849 501264
61504 62001 62500 63001 63504	235225 236196 237169 238144	502681 504100 505521 506944
64009 64516 65025 65536 66049	239121 240100 241081 242064	508369 509796 511225 512656
66564 67081 67600 68121 68644	243049 244036 245025 246016	514089 515524 516961 518400
69169 69696 70225 70756 71289	247009 248004 249001 250000	519841 521284 522729 524176
71824 72361 72900 73441 73984	251001 252004 253009 254016	525625 527076 528529 529984
74529 75076 75625 76176 76729	255025 256036 257049 258064	531441 532900 534361 535824
77284 77841 78400 78961 79524	259081 260100 261121 262144	537289 538756 540225 541696
80089 80656 81225 81796 82369	263169 264196 265225 266256	543169 544644 546121 547600
82944 83521 84100 84681 85264	267289 268324 269361 270400	549081 550564 552049 553536
85849 86436 87025 87616 88209	271441 272484 273529 274576	555025 556516 558009 559504
88804 89401 90000 90601 91204	275625 276676 277729 278784	561001 562500 564001 565504

Primeros 1000 cuadrados perfectos (Hoja 2 - desde 753^2 = 567.009 hasta 1000^2 = 1.000.000)

567009 568516 570025 571536	700569 702244 703921 705600	848241 850084 851929 853776
573049 574564 576081 577600	707281 708964 710649 712336	855625 857476 859329 861184
579121 580644 582169 583696	714025 715716 717409 719104	863041 864900 866761 868624
585225 586756 588289 589824	720801 722500 724201 725904	870489 872356 874225 876096
591361 592900 594441 595984	727609 729316 731025 732736	877969 879844 881721 883600
597529 599076 600625 602176	734449 736164 737881 739600	885481 887364 889249 891136
603729 605284 606841 608400	741321 743044 744769 746496	893025 894916 896809 898704
609961 611524 613089 614656	748225 749956 751689 753424	900601 902500 904401 906304
616225 617796 619369 620944	755161 756900 758641 760384	908209 910116 912025 913936
622521 624100 625681 627264	762129 763876 765625 767376	915849 917764 919681 921600
628849 630436 632025 633616	769129 770884 772641 774400	923521 925444 927369 929296
635209 636804 638401 640000	776161 777924 779689 781456	931225 933156 935089 937024
641601 643204 644809 646416	783225 784996 786769 788544	938961 940900 942841 944784
648025 649636 651249 652864	790321 792100 793881 795664	946729 948676 950625 952576
654481 656100 657721 659344	797449 799236 801025 802816	954529 956484 958441 960400
660969 662596 664225 665856	804609 806404 808201 810000	962361 964324 966289 968256
667489 669124 670761 672400	811801 813604 815409 817216	970225 972196 974169 976144
674041 675684 677329 678976	819025 820836 822649 824464	978121 980100 982081 984064
680625 682276 683929 685584	826281 828100 829921 831744	986049 988036 990025 992016
687241 688900 690561 692224	833569 835396 837225 839056	994009 996004 998001 1000000.
693889 695556 697225 698896	840889 842724 844561 846400	

Primeros 1000 cubos perfectos (Hoja 1 - desde 1^3 = 1 hasta 358^3 = 45.882.712)

1 8 27 64 125 216 343 512 729 1000 1331	6859000 6967871 7077888 7189057 7301384 7414875
1728 2197 2744 3375 4096 4913 5832 6859	7529536 7645373 7762392 7880599 8000000 8120601
8000 9261 10648 12167 13824 15625 17576	8242408 8365427 8489664 8615125 8741816 8869743
19683 21952 24389 27000 29791 32768 35937	8998912 9129329 9261000 9393931 9528128 9663597
39304 42875 46656 50653 54872 59319 64000	9800344 9938375 10077696 10218313 10360232
68921 74088 79507 85184 91125 97336	10503459 10648000 10793861 10941048 11089567
103823 110592 117649 125000 132651 140608	11239424 11390625 11543176 11697083 11852352
148877 157464 166375 175616 185193 195112	12008989 12167000 12326391 12487168 12649337
205379 216000 226981 238328 250047 262144	12812904 12977875 13144256 13312053 13481272
274625 287496 300763 314432 328509 343000	13651919 13824000 13997521 14172488 14348907
357911 373248 389017 405224 421875 438976	14526784 14706125 14886936 15069223 15252992
456533 474552 493039 512000 531441 551368	15438249 15625000 15813251 16003008 16194277
571787 592704 614125 636056 658503 681472	16387064 16581375 16777216 16974593 17173512
704969 729000 753571 778688 804357 830584	17373979 17576000 17779581 17984728 18191447
857375 884736 912673 941192 970299	18399744 18609625 18821096 19034163 19248832
1000000 1030301 1061208 1092727 1124864	19465109 19683000 19902511 20123648 20346417
1157625 1191016 1225043 1259712 1295029	20570824 20796875 21024576 21253933 21484952
1331000 1367631 1404928 1442897 1481544	21717639 21952000 22188041 22425768 22665187
1520875 1560896 1601613 1643032 1685159	22906304 23149125 23393656 23639903 23887872
1728000 1771561 1815848 1860867 1906624	24137569 24389000 24642171 24897088 25153757
1953125 2000376 2048383 2097152 2146689	25412184 25672375 25934336 26198073 26463592
2197000 2248091 2299968 2352637 2406104	26730899 27000000 27270901 27543608 27818127
2460375 2515456 2571353 2628072 2685619	28094464 28372625 28652616 28934443 29218112
2744000 2803221 2863288 2924207 2985984	29503629 29791000 30080231 30371328 30664297
3048625 3112136 3176523 3241792 3307949	30959144 31255875 31554496 31855013 32157432
3375000 3442951 3511808 3581577 3652264	32461759 32768000 33076161 33386248 33698267
3723875 3796416 3869893 3944312 4019679	34012224 34328125 34645976 34965783 35287552
4096000 4173281 4251528 4330747 4410944	35611289 35937000 36264691 36594368 36926037
4492125 4574296 4657463 4741632 4826809	37259704 37595375 37933056 38272753 38614472
4913000 5000211 5088448 5177717 5268024	38958219 39304000 39651821 40001688 40353607
5359375 5451776 5545233 5639752 5735339	40707584 41063625 41421736 41781923 42144192
5832000 5929741 6028568 6128487 6229504	42508549 42875000 43243551 43614208 43986977
6331625 6434856 6539203 6644672 6751269	44361864 44738875 45118016 45499293 45882712

Primeros 1000 cubos perfectos (Hoja 2 - desde 359^3 = 46.268.279 hasta 871^3 = 660.776.311)

46268279	46656000	47045881	47437928
47832147	48228544	48627125	49027896
49430863	49836032	50243409	50653000
51064811	51478848	51895117	52313624
52734375	53157376	53582633	54010152
54439939	54872000	55306341	55742968
56181887	56623104	57066625	57512456
57960603	58411072	58863869	59319000
59776471	60236288	60698457	61162984
61629875	62099136	62570773	63044792
63521199	64000000	64481201	64964808
65450827	65939264	66430125	66923416
67419143	67917312	68417929	68921000
69426531	69934528	70444997	70957944
71473375	71991296	72511713	73034632
73560059	74088000	74618461	75151448
75686967	76225024	76765625	77308776
77854483	78402752	78953589	79507000
80062991	80621568	81182737	81746504
82312875	82881856	83453453	84027672
84604519	85184000	85766121	86350888
86938307	87528384	88121125	88716536
89314623	89915392	90518849	91125000
91733851	92345408	92959677	93576664
94196375	94818816	95443993	96071912
96702579	97336000	97972181	98611128
99252847	99897344	100544625	101194696
101847563	102503232	103161709	103823000
104487111	105154048	105823817	106496424
107171875	107850176	108531333	109215352
109902239	110592000	111284641	111980168
112678587	113379904	114084125	114791256
115501303	116214272	116930169	117649000
118370771	119095488	119823157	120553784
121287375	122023936	122763473	123505992
124251499	125000000	125751501	126506008
127263527	128024064	128787625	129554216
130323843	131096512	131872229	132651000
133432831	134217728	135005697	135796744
136590875	137388096	138188413	138991832
139798359	140608000	141420761	142236648
143055667	143877824	144703125	145531576
146363183	147197952	148035889	148877000
149721291	150568768	151419437	152273304
153130375	153990656	154854153	155720872
156590819	157464000	158340421	159220088
160103007	160989184	161878625	162771336
163667323	164566592	165469149	166375000
167284151	168196608	169112377	170031464
170953875	171879616	172808693	173741112
174676879	175616000	176558481	177504328
178453547	179406144	180362125	181321496
182284263	183250432	184220009	185193000
186169411	187149248	188132517	189119224
190109375	191102976	192100033	193100552
194104539	195112000	196122941	197137368
198155287	199176704	200201625	201230056

202262003	203297472	204336469	205379000	206425071
207474688	208527857	209584584	210644875	211708736
212776173	213847192	214921799	216000000	217081801
218167208	219256227	220348864	221445125	222545016
223648543	224755712	225866529	226981000	228099131
229220928	230346397	231475544	232608375	233744896
234885113	236029032	237176659	238328000	239483061
240641848	241804367	242970624	244140625	245314376
246491883	247673152	248858189	250047000	251239591
252435968	253636137	254840104	256047875	257259456
258474853	259694072	260917119	262144000	263374721
264609288	265847707	267089984	268336125	269586136
270840023	272097792	273359449	274625000	275894451
277167808	278445077	279726264	281011375	282300416
283593393	284890312	286191179	287496000	288804781
290117528	291434247	292754944	294079625	295408296
296740963	298077632	299418309	300763000	302111711
303464448	304821217	306182024	307546875	308915776
310288733	311665752	313046839	314432000	315821241
317214568	318611987	320013504	321419125	322828856
324242703	325660672	327082769	328509000	329939371
331373888	332812557	334255384	335702375	337153536
338608873	340068392	341532099	343000000	344472101
345948408	347428927	348913664	350402625	351895816
353393243	354894912	356400829	357911000	359425431
360944128	362467097	363994344	365525875	367061696
368601813	370146232	371694959	373248000	374805361
376367048	377933067	379503424	381078125	382657176
384240583	385828352	387420489	389017000	390617891
392223168	393832837	395446904	397065375	398688256
400315553	401947272	403583419	405224000	406869021
408518488	410172407	411830784	413493625	415160936
416832723	418508992	420189749	421875000	423564751
425259008	426957777	428661064	430368875	432081216
433798093	435519512	437245479	438976000	440711081
442450728	444194947	445943744	447697125	449455096
451217663	452984832	454756609	456533000	458314011
460099648	461889917	463684824	465484375	467288576
469097433	470910952	472729139	474552000	476379541
478211768	480048687	481890304	483736625	485587656
487443403	489303872	491169069	493039000	494913671
496793088	498677257	500566184	502459875	504358336
506261573	508169592	510082399	512000000	513922401
515849608	517781627	519718464	521660125	523606616
525557943	527514112	529475129	531441000	533411731
535387328	537367797	539353144	541343375	543338496
545338513	547343432	549353259	551368000	553387661
555412248	557441767	559476224	561515625	563559976
565609283	567663552	569722789	571787000	573856191
575930368	578009537	580093704	582182875	584277056
586376253	588480472	590589719	592704000	594823321
596947688	599077107	601211584	603351125	605495736
607645423	609800192	611960049	614125000	616295051
618470208	620650477	622835864	625026375	627222016
629422793	631628712	633839779	636056000	638277381
640503928	642735647	644972544	647214625	649461896
651714363	653972032	656234909	658503000	660776311

Primeros 1000 cubos perfectos (Hoja 3 - desde 872^3 = 663.054.848 hasta 1000^3 = 1.000.000.000)

663054848	665338617	667627624	669921875	672221376	674526133	676836152	679151439	681472000
683797841	686128968	688465387	690807104	693154125	695506456	697864103	700227072	702595369
704969000	707347971	709732288	712121957	714516984	716917375	719323136	721734273	724150792
726572699	729000000	731432701	733870808	736314327	738763264	741217625	743677416	746142643
748613312	751089429	753571000	756058031	758550528	761048497	763551944	766060875	768575296
771095213	773620632	776151559	778688000	781229961	783777448	786330467	788889024	791453125
794022776	796597983	799178752	801765089	804357000	806954491	809557568	812166237	814780504
817400375	820025856	822656953	825293672	827936019	830584000	833237621	835896888	838561807
841232384	843908625	846590536	849278123	851971392	854670349	857375000	860085351	862801408
865523177	868250664	870983875	873722816	876467493	879217912	881974079	884736000	887503681
890277128	893056347	895841344	898632125	901428696	904231063	907039232	909853209	912673000
915498611	918330048	921167317	924010424	926859375	929714176	932574833	935441352	938313739
941192000	944076141	946966168	949862087	952763904	955671625	958585256	961504803	964430272
967361669	970299000	973242271	976191488	979146657	982107784	985074875	988047936	991026973
994011992	997002999	1000000000.						

Índice Alfabético