MATEMÁTICA

4to. Año

Educación Secundaria

Profesor: Walter O. Rosello

Colegio Los Robles
San Andrés de Giles

Enlaces importantes

Enlace para descargar el cuadernillo de 4to año:

https://matematica-walter9.webnode.com/a4to-ano-es/

Enunciados de problemas históricos de Olimpíada Matemática Ñandú (desde 5to Año EP a 1er año ES):

https://omsag.webnode.com/enunciados-historicos/

Enunciados de problemas históricos de Olimpíada Matemática Argentina (OMA) (desde 2do año ES hasta 7mo año ES):

https://omsag.webnode.com/enunciados-historicos-oma/

OMSAG Blog: https://omsag.blogspot.com/

OMA Página Oficial: https://www.oma.org.ar/

OMA Foros: https://omaforos.com.ar/

Unidad N° 1: Probabilidad y Estadística

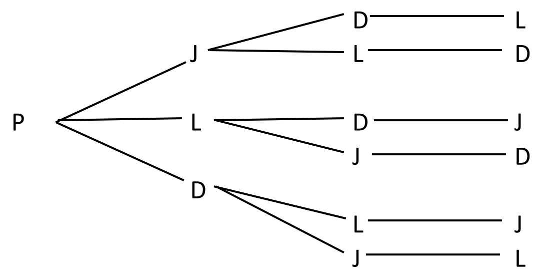
Combinatoria

Muchas veces nos encontramos frente a la necesidad de contar las distintas formas en que se pueden disponer o agrupar los elementos de un conjunto. Este recuento, en algunos casos es sencillo y, en otros, no. La combinatoria provee las herramientas necesarias para lograr este propósito.

Problema 1: Una empresa de cosmética decide lanzar al mercado una nueva línea de productos, compuesta de cuatro artículos: jabón, perfume, desodorantes y loción. Se analiza la posibilidad de exhibirlos de diferentes formas. ¿De cuántas maneras se puede realizar cada presentación en un estuche con divisiones que contenga los cuatro artículos?

Una manera de describir las formas posibles de ubicar los artículos es utilizando un diagrama llamado **diagrama de árbol**.

Ubicando primero el perfume, obtenemos el siguiente diagrama:



Vemos que hay 6 posibles ordenamientos.

Lo mismo sucederá si comenzamos con cualquiera de los otros tres productos. Si hacemos los otros tres diagramas, se deduce que la primera división puede ser ocupada por cualquiera de los cuatro artículos. Para cada una de estas opciones, el segundo casillero es ocupado por alguno de los tres que queda. Del mismo modo, para cada uno de ellos, la tercera casilla queda ocupada por alguno de los dos restantes y, finalmente, en el último compartimiento, queda una opción de cada caso.

Si contamos todas las opciones ***obtenemos 24 formas diferentes de agrupación***.

Utilizando un diagrama de casilleros tenemos que: Para la primera casilla tenemos cuatro posibilidades, para la segunda casilla nos quedan tres opciones, para la tercera sólo dos opciones y para la última una opción. Al multiplicarlas entre sí se obtiene:

$$\underline{\underline{4}} \cdot \underline{\underline{3}} \cdot \underline{\underline{2}} \cdot \underline{\underline{1}} = 24$$

Principio fundamental de conteo

La cantidad de maneras de realizar un conjunto de operaciones distintas es igual al producto de las maneras en que cada operación se puede realizar individualmente.

Ejemplo: En un almacén hay 5 tipos de quesos, 3 tipos de jamón y 2 tipos de pan.
¿De cuántas formas puedo armarme un sándwich de jamón y queso con todos los ingredientes?

Si pensamos que la primera operación es elegir el tipo de queso, tenemos cinco configuraciones: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 y Q_5.
Si la segunda operación es elegir el tipo de jamón, tenemos tres configuraciones: J_1, J_2 y J_3.
Finalmente sucede lo mismo con el pan: P_1 y P_2.
Si multiplicamos, nos queda: 5x3x2 = 30, o sea que se pueden armar los sándwiches de 30 maneras diferentes.

Actividades

1) Calcular las posibilidades mediante un diagrama de árbol:

a. En un equipo de fútbol-sala disponen para jugar de pantalones blancos o negros, y de camisetas rojas, azules o verdes. ¿De cuántas maneras se pueden vestir para un partido?

b. Se tira una moneda y un dado, ¿cuáles son los resultados posibles?

c. Se tira una moneda, si sale cara se saca una bola de la urna A que contiene una bola roja, una azul y una verde; y si sale cruz se saca de la urna B en la que hay una bola roja, una azul, una blanca y una negra. Escribe los posibles resultados.

2) A mi amiga Débora le encantan los accesorios, así que cuando llega su cumpleaños siempre le regalamos nuevos. Hace poco nos envió por el grupo de Whatsapp una fotografía donde se pueden ver dos pulseras, cuatro pares de aros y siete pequeños ganchos con tres collares diferentes en cada una de ellos.
Siempre sale de su casa con los tres tipos de accesorios: una pulsera, un collar, y un par de aros iguales o diferentes, sin importarle en qué oreja coloca cada uno de ellos.

¿Conociendo sus hábitos, de cuántas maneras diferentes puede combinar los accesorios que tiene?

Permutaciones: Cada una de las formas distintas en que se pueden ordenar **n** elementos en **n** casilleros, sin repetirlos, se denomina **permutación**. El número de permutaciones que pueden obtenerse con los **n** elementos se simboliza P_n y se lee "**permutaciones** de **n** elementos".

En general, el número de permutaciones de **n** elementos, se puede calcular mediante la expresión:

$$P_n = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,.\, \ldots \,.\, 1$$

$$P_n = n!$$

Ésta última expresión se lee "**factorial de n**" o "**n factorial**".

Nota: Las calculadoras científicas tienen una tecla que permite calcular el factorial de un número dado. La tecla correspondiente es **x!**

Actividades

3) Tenemos cinco personas y las queremos ordenar en una fila. ¿De cuántas formas las podemos alinear?

4) ¿Cuántos números de 6 cifras diferentes se puede formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

5) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?

6) Al permutar las letras de la palabra BARCO se forman muchas palabras con y sin sentido. Se ordenan todas ellas alfabéticamente: ABCOR, ABCRO, ABOCR, ABORC, ABRCO, ABROC, ACBOR, … Determinar en qué puesto aparece la palabra COBRA.

Siguiendo con el problema inicial: Si quieren presentar en una caja de madera con divisiones, sin tapa y con dos artículos distintos seleccionados de los cuatro disponibles. ¿Cuántas formas distintas de agruparlos se pueden obtener?

Realizando un diagrama de árbol o un diagrama de casilleros se obtiene:

$\underline{\underline{4}} \,.\, \underline{\underline{3}}$ = 12 formas distintas

Variaciones: Cada una de las formas distintas en que se pueden ordenar **n** elementos en **r** casilleros (n > r), sin repetirlos, se denomina **variación**. Dos formas que tengan los mismos elementos, pero en distinto orden, son consideradas distintas. El "número" de **variaciones** que se pueden obtener con los **n** elementos se simboliza $\mathbf{V_{n,r}}$ y se lee "**variaciones** de **n** elementos tomados de a **r**".

Las variaciones de **n** elementos agrupados de a **r** pueden calcularse, utilizando factoriales, mediante la siguiente expresión:

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Nota: Algunas calculadoras tienen una tecla que permite calcular variaciones. Esta es $_n\mathbf{P}_r$ con n > r. Para calcular primero se ingresa el valor de n, luego se presiona sobre la tecla $_n\mathbf{P}_r$ y finalmente se ingresa el valor de r y se presiona =.

7) Tenemos 5 finalistas en un programa de TV, hay 3 premios: 1° un TV, 2° un lavarropas y 3° un DVD. ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir los premios?

8) ¿Cuántos números de seis cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

Siguiendo con la actividad inicial: Si los productos se quieren presentar en un pequeño bolso transparente que contenga dos artículos diferentes de los cuatro disponibles. ¿Cuántas formas distintas de agruparlos se pueden obtener?

Como en este tipo de envase no hay casilleros, no importa el orden en que se ubiquen los productos: el par PL es igual al par LP (determinan la misma presentación). Por lo tanto, hay exactamente la mitad de casos que en la presentación anterior. Quedan determinadas seis maneras distintas de representarlos.

Combinaciones: Cada una de las formas distintas en que se pueden seleccionar **r** elementos diferentes de un total de **n,** sin considerar el orden de los mismos, se denomina **combinación**.

No tener en cuenta el orden de los elementos significa que dos formas que tengan los mismos elementos, pero en distinto orden, son consideradas iguales. El número de combinaciones que pueden obtenerse con los **n** elementos elegidos, sin repetirlos, se simboliza $\mathbf{C_{n,r}}$ y se lee "**combinaciones** de **n** elementos agrupados de a **r**".

Las combinaciones se calculan mediante la siguiente expresión:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

La expresión $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ se indica con el símbolo $\binom{n}{r}$, que se lee: **número combinatorio n,r.**

Nota: Algunas calculadoras tienen una tecla que permite calcular combinaciones. Esta es $_n\mathbf{C}_r$ con n > r. Para calcular primero se ingresa el valor de n, luego se presiona sobre la tecla $_n\mathbf{C}_r$ y finalmente se ingresa el valor de r y se presiona =.

En el ejercicio anterior: $C_{4,2} = \binom{4}{2} \Rightarrow C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{2.2} = 6$

Cuadro resumen de combinatoria:

n elementos (cantidad finita de elementos) → **Ordenarlos** → **Permutaciones**

n elementos (cantidad finita de elementos) → **Agruparlos** (de a r elementos, $r \leq n$) → **Grupos ordenados** → **Variaciones**

n elementos (cantidad finita de elementos) → **Agruparlos** (de a r elementos, $r \leq n$) → **Grupos no ordenados** → **Combinaciones**

9) ¿Cuántos números de cuatro cifras no repetidas se pueden escribir con los dígitos 1 al 9?

10) ¿Cuántos números de cuatro cifras no repetidas, terminados en 3, se pueden escribir con los dígitos del 1 al 9?

11) En un negocio se hace una oferta: 12 cajas contienen 3 botellas de vino cada una. Todas son diferentes. Determinar:

a) ¿De cuántas maneras se puede armar cada una de las cajas que tiene divisiones e importa el orden en el cual se ubiquen las botellas?

b) Si se consideran bolsas en lugar de cajas, ¿Cuántas bolsas diferentes se pueden armar?

12) En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

13) ¿Cuántas banderas de tres colores diferentes se pueden formar con 8 colores?

14) ¿Cuántas palabras distintas, sin importar su significado, se pueden formar a partir de la palabra RAMO?

15) ¿Cuántas palabras distintas, sin importar su significado, se pueden formar a partir de la palabra PERRO?

Cuando tenemos que resolver este punto nos encontramos con el problema de que la letra R está repetida. O sea que al permutar las letras R, en algunas ocasiones obtengo las mismas palabras. Esto es una permutación con repetición y para resolverla se debe utilizar la siguiente fórmula:

$$\mathbf{P'_{n;\,k_1,k_2,\dots,k_r} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\dots\,k_r!}} \qquad k_1 + k_2 + \dots + k_r \leq n$$

O sea que, en nuestro caso es: $P'_{5;2} = \frac{5!}{2!} = 60$

16) ¿Cuántas palabras distintas, sin importar su significado, se pueden formar a partir de la palabra MISSISSIPPI?

17) Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?

18) En el palo de señales de un barco se pueden izar dos banderas rojas, dos azules y tres verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las siete banderas?

19) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5? Nota: Las cifras pueden repetirse:

En este caso tenemos cinco dígitos posibles para formar números de 3 cifras. Importa el orden ya que 123 no es lo mismo que 321. Esto es una variación con repetición en donde n representa la cantidad de elementos diferentes que se pueden seleccionar y r la cantidad de elementos que se deben seleccionar (En las variaciones con repetición puede ser que n > r o que n ≤ r). Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{\mathbf{V'_{n;r} = n^r}}$$

En el ejercicio: n = 5 y r = 3, o sea que: $V'_{5,3} = 5^3 = 125$.

20) Tenemos 6 libros iguales de historia, 6 libros iguales de matemática y 6 libros iguales de Física. Elegimos 6 libros al azar. ¿De cuántas formas podemos elegirlos?

En este caso hay que elegir 6 libros de un total de 18. Pero algunos de ellos se repiten. No importa el orden, ya que elegir M-H-F es lo mismo que elegir H-F-M.

Para resolver este ejercicio es necesario utilizar una combinación con repetición.

Se utiliza la siguiente fórmula, donde n representa la cantidad de elementos a seleccionar y r la cantidad de elementos distintos.

$$\boxed{\mathbf{C_{n+(r-1);r} = \binom{n+(r-1)}{r}}}$$

En el problema: n = 6 (el total de los libros que se eligen) y r = 3 (porque hay sólo 3 elementos diferentes: los libros de matemática, los de física y los de historia).

$$\mathbf{C_{6+(3-1);3} = \binom{6+(3-1)}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{40320}{720} = 56}$$

Actividades generales

21) Si tenemos 15 libros iguales de historia, 15 libros iguales de matemática, 15 libros iguales de física y 15 libros iguales de biología y elijo 15 libros al azar. ¿De cuántas formas pueden elegirse?

22) En una bodega hay muchas botellas con cinco tipos de bebidas diferentes. ¿De cuántas formas pueden elegirse 4 botellas?

23) Si tenemos 3 grupos de pelotas rojas, azules y verdes y cada uno tiene como mínimo 8 pelotas.

a. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 8 pelotas?
b. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 8 pelotas si tiene que haber una de cada color?

24) Cuatro amigas van todos los días a una plaza, se sientan una al lado de la otra en un banco que tiene espacio justo para cuatro personas y se sacan una foto para subir a Instagram. Cada día tratan de ubicarse de una manera diferente.

a) ¿De cuántas maneras distintas pueden ubicarse en el banco para la foto?
b) ¿Cuántas fotos diferentes se pueden tomar si una de las amigas (Gisella), tiene que estar en uno de los extremos del banco?

La Probabilidad y dos de sus enfoques: el clásico y el experimental

Algunas definiciones previas:

Espacio Muestral: Se llama espacio muestral, asociado a un experimento, al conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento. Se representa con E.

Ejemplo: En el experimento de lanzar una moneda al aire y ver de qué lado cae, el espacio muestral está formado por los resultados posibles que son: cara o seca.

Los experimentos que dan lugar a espacios muestrales se llaman **experimentos aleatorios**. Estos son experimentos en donde interviene el azar. Se diferencian de aquellos experimentos en donde uno puede predecir el resultado.

En el ejemplo dado, el experimento sería el de lanzar la moneda al aire.

Los subconjuntos dentro de un espacio muestral se denominan **sucesos**.

En el ejemplo dado, un suceso puede ser: sale cara.

La Frecuencia: es la cantidad **n** de repeticiones de un experimento aleatorio.

F_a es la **Frecuencia absoluta de A**. Es el número de veces que se repite un suceso A.

La Frecuencia relativa de un suceso A es igual a la frecuencia absoluta de A sobre n (número de repeticiones de un experimento aleatorio).

Definición clásica de probabilidad

La definición más sencilla de probabilidad, a partir de la cual se edificó la Teoría de la Probabilidad, es la dada por el francés Pierre Simón Laplace (1749-1827): "La probabilidad de un suceso es la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que nada obligue a creer que alguno de estos casos debe tener lugar con preferencia a los demás, lo que hace que todos sean para nosotros igualmente posibles".

Se puede expresar con la fórmula:

$$P(S) = \frac{\textbf{Número de casos favorables al suceso S}}{\textbf{Número de casos posibles}}$$

Ejemplo: Al lanzar un dado equilibrado, cuál es la probabilidad de:

a) Obtener 1.

b) Obtener un número menor a 3.

c) Obtener un número par.

d) Obtener un número impar.

e) Obtener un número mayor a 6.

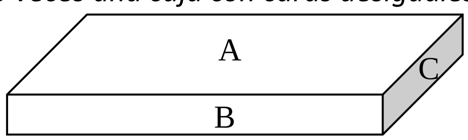
La Probabilidad Experimental o Estadística

Es la que se define sobre la base de la realización repetitiva de un experimento, considerando la frecuencia del mismo. Es utilizada habitualmente en estudios de mercado, análisis de intención de voto, resultados en la aplicación de medicamentos, etc. Son casos en los cuales no se puede pronosticar un resultado sin una experiencia previa.

El procedimiento está fundamentado por el teorema del matemático suizo Jacobo Bernoulli (1654-1705): "Si se tiene una manera de repetir N veces una experiencia, y entre los resultados obtenidos hay n casos favorables, la probabilidad de un suceso favorable es aproximadamente igual al cociente $\frac{n}{N}$ y la aproximación es mayor cuanto más grande sea el número N de experimentos realizados".

Esta propiedad permite resolver muchos casos en los cuales es difícil o no es factible la enumeración de los casos favorables y los posibles.

Ejemplo: Se lanza 1000 veces una caja con caras desiguales.



Las caras iguales entre sí son: A y F; B y D, C y E.

Se obtienen los siguientes resultados:

Cara	**F_a**	**Fr**
A	348	0,348 $\cong$ 0,35
B	139	0,139 $\cong$ 0,14
C	12	0,012 $\cong$ 0,01
D	141	0,141 $\cong$ 0,14
E	11	0,011 $\cong$ 0,01
F	349	0,349 $\cong$ 0,35

Se puede advertir en la tabla que las frecuencias relativas son las que se consideran como aproximación de las probabilidades.

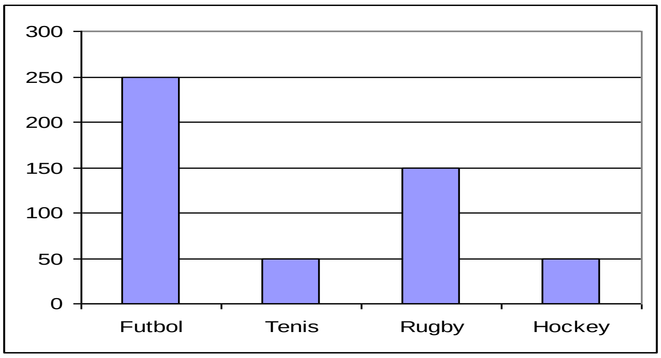
$\mathbf{F_A} = \frac{348}{1000} \Rightarrow \mathbf{P(A)} \cong 0{,}35$

$\mathbf{F_B} = \frac{139}{1000} \Rightarrow \mathbf{P(B)} \cong 0{,}14$ $\mathbf{F_c} = \frac{12}{1000} \Rightarrow \mathbf{P(C)} \cong 0{,}012$

Actividades

1) El siguiente diagrama muestra la distribución de frecuencias correspondiente a los deportes que juegan los socios de un club. Hay un total de 500 socios y cada uno practica solo un deporte.
Calcular la probabilidad de que al seleccionar uno de ellos al azar resulte:

a) Jugador de tenis. b) Jugador de rugby.
c) Jugador de karate. d) Jugador de cualquiera de los deportes del club.
e) Jugador de tenis y fútbol. f) Jugador de hockey o rugby.



2) Se considera un mazo de 40 cartas. Calcular la probabilidad de que al extraer una carta, resulte: a) una carta de oro, b) un as, c) un as de oro, d) una figura, e) un 5 de espadas, f) un rey, g) una carta de copas. h) un comodín.

Probabilidad y Combinatoria

Ejemplo: Se extraen cuatro cartas de un mazo de 50 cartas españolas. Hallar la probabilidad de que:

a. las 4 cartas sean ases.
b. las cuatro cartas sean de oro.
c. las cuatro cartas sean números pares.

Respuestas:

a) Los casos posibles son todos los conjuntos de 4 cartas que se pueden obtener sobre un total de 50 cartas. Los casos favorables son todos los grupos de 4 que puedo formar con los 4 ases. No importa el orden y no puede haber repetición:

P(4 ases) = $\frac{C_{4,4}}{C_{50,4}} = \frac{1}{230.300} \cong 0{,}000004342 \cong 4{,}342.10^{-6}$.

b) P(4 cartas de oro) = $\frac{C_{12,4}}{C_{50,4}} = \frac{495}{230.300} = \frac{99}{46.060} \cong 0{,}002149 \cong 2{,}149.10^{-3}$.

c) P(4 cartas pares) = $\frac{C_{24,4}}{C_{50,4}} = \frac{10.626}{230.300} = \frac{759}{16.450} \cong$ 0,04613.

3) En un concurso de un programa de TV se deben colocar 6 productos en seis casilleros que tienen una etiqueta cubierta. Luego, el conductor descubre las etiquetas y procede a contar las coincidencias. Si coinciden todos los productos, el participante gana el premio mayor.
a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio mayor?
b) ¿Cuál es la probabilidad de acertar exactamente 5?

4) En una fuente hay una docena de empanadas de queso. Tres de ellas perdieron el relleno durante la cocción.
a) Se elige una al azar. Calcular la probabilidad de que no tenga relleno.
b) Se eligen tres al azar. Calcular la probabilidad de que ninguna tenga queso.
c) Se seleccionan 5 al azar. Calcular la probabilidad de que no se haya sacado ninguna sin queso.

5) En un bolillero hay 12 bolillas correspondientes al programa de Historia. Del mismo debo sacar 2 para rendir examen oral sobre ambas. Si hay 3 bolillas que no estudié. ¿CELP de que ninguna de ellas me toque?

6) En un plano hay 10 puntos: A, B, C, D, E, F, G, I, O, U. No existen 3 alineados. Si se elige al azar uno de los triángulos que entre ellos pueden formar, ¿CELP de que los 3 vértices sean vocales?

7) Una caja contiene 20 bolillas amarillas y 8 rojas; se extraen 2 bolillas al azar.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean amarillas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

Tipos de sucesos

Sucesos Excluyentes y No Excluyentes: Dos sucesos A y B son **excluyentes** cuando no pueden ocurrir simultáneamente. De lo contrario, se denominan **no excluyentes**.

Si A y B son excluyentes $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

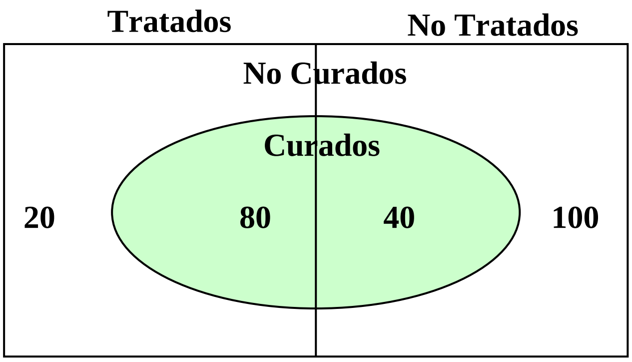
Ejemplo: Si tiro una moneda: Suceso A = Salga cara. Suceso B = Salga seca. A y B son **excluyentes**.
Si tiro un dado. Suceso A = Salga un número mayor a 3. Suceso B: Salga un número par. A y B son **no excluyentes**.

Sucesos Independientes Y Dependientes: Dos sucesos A y B son **independientes** si la ocurrencia de uno de ellos no influye ni condiciona la ocurrencia o no del otro. En caso contrario, los sucesos se denominan **dependientes**.
Ejemplo: Si se realizan dos extracciones sucesivas de una muestra, con reposición, estos sucesos son **independientes**, si no hay reposición son **dependientes**.

Situación a trabajar: Eficacia de un nuevo medicamento.
Se compararon los resultados obtenidos sobre 240 enfermos con una afección estomacal. De ellos, 100 fueron tratados con un nuevo medicamento; los restantes no recibieron el tratamiento. La información obtenida se presenta en la tabla siguiente:

	Tratados	**No Tratados**	**Totales**
Curados	80	40	120
No Curados	20	100	120
Totales	100	140	240

Para una mejor comprensión del análisis y de los cálculos, es conveniente presentar los datos en un diagrama denominado **Diagrama de Venn** que es una representación gráfica de conjuntos.



De la nómina de pacientes, se selecciona una persona al azar. Se quiere determinar cuál es la probabilidad de que dicha persona resulte ser:

a. un paciente curado.
b. un paciente que recibió el tratamiento.
c. un paciente curado **si** se sabe con seguridad que pertenece al grupo de los enfermos que recibió el tratamiento.
d. un paciente curado **y** que haya recibido el tratamiento.
e. un paciente tratado **y** que no haya recibido el medicamento.

A continuación veamos las diferentes respuestas a las preguntas anteriores, conjuntamente con el marco teórico:

Respuesta a) Probabilidad de seleccionar un paciente curado:
N° casos favorables al suceso S: 120 (total de pacientes curados).
N° de casos posibles: 240 (total de pacientes en general).

P(C) = $\frac{120}{240} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Respuesta b) Probabilidad de que la persona seleccionada haya recibido el tratamiento.
N° casos favorables al suceso S: 100 (total de pacientes que recibieron el tratamiento).
N° de casos posibles: 240 (total de pacientes en general).

P(T) = $\frac{100}{240} = \frac{5}{12} \cong 0{,}42$.

Las preguntas a y b se pueden responder utilizando:

Probabilidad Simple: P(A)

Es la probabilidad de que ocurra el suceso A. En general, se calcula mediante la fórmula:

$$P(A) = \frac{\textbf{Número de casos favorables al suceso A}}{\textbf{Número de casos posibles del experimento}}$$

Respuesta c) Probabilidad de que la persona seleccionada se encuentre recuperada de la afección estomacal, si se sabe que ha sido tratada. Se debe tener en cuenta que la selección se debe realizar sobre los pacientes que recibieron el tratamiento. Es decir que la selección se **condiciona** a que el paciente haya recibido tratamiento.

En la intersección entre "curados" y "tratados" hay 80 elementos, y en el conjunto "tratados" hay 100 elementos.

N° casos favorables al suceso S: 80 (total de pacientes curados).
N° de casos posibles: 100 (total de pacientes tratados).

P(C/T) = $\frac{80}{100}$ = $\frac{4}{5}$ = 0,80.

La pregunta c se pueden responder utilizando:

Probabilidad Condicionada: P(A/B)

Dados dos sucesos A y B, se llama probabilidad de A condicionado a B a la probabilidad de que ocurra A, sabiendo que ocurrió B. La cantidad de casos queda restringida a los sucesos en que ocurre B, y a partir de este nuevo espacio muestral, se analiza la cantidad de casos en que se presenta el suceso A.

En general, se calcula con la expresión:

$$\mathbf{P(A/B)} = \frac{\mathbf{P(A\ y\ B)}}{\mathbf{P(B)}}$$

En el punto c) tenemos que: P(C/T) = $\frac{\mathbf{P(C\ y\ T)}}{\mathbf{P(T)}}$

Siendo P(C y T) = $\frac{1}{3}$ y P(T) = $\frac{5}{12}$

Resulta: P(C/T) = $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}}$ **=** $\frac{4}{5}$ **= 0,80**

Actividades

8) Responder las preguntas d y e del problema anterior.

9) Se llevó a cabo una encuesta entre estudiantes universitarios para evaluar sus hábitos de estudio. Los datos se volcaron en la siguiente tabla que discrimina las respuestas según la situación laboral del estudiante:

	Estudia todos los días (D)	Estudia fre-cuentemente en la semana (F)	Estudia llegado el tiempo de los exámenes o entregas (E)	Total
No Trabaja ($\bar{T}$)	45	30	20	**95**
Trabaja (T)	20	40	65	**125**
Total	**65**	**70**	**85**	**220**

a. Si se elige un estudiante al azar entre los encuestados, hallen la probabilidad de que trabaje.
b. Si se elige un estudiante al azar entre los encuestados, hallen la probabilidad de que estudie todos los días.
c. Si se elige un estudiante al azar entre los encuestados, hallen la probabilidad de que no estudie todos los días.
d. Si se elige un estudiante al azar entre los que trabajan, calcular la probabilidad de que estudie frecuentemente en la semana.

10) Las máquinas X e Y producen diariamente 1000 y 1600 tornillos con un porcentaje de piezas defectuosas del 3% y el 5% respectivamente.

Completar la siguiente tabla de doble entrada

	X	**Y**	**Total**
Defectuoso			
No Defectuoso			
Total			

Si se extrae un tornillo al azar, calcular:

a. la probabilidad de que sea defectuoso.
b. la probabilidad de que provenga de X, sabiendo que es defectuoso.
c. la probabilidad de que sea de Y, sabiendo que es defectuoso.

Triángulo de Tartaglia o Pascal

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1

Binomio de Newton

$$(a + b) = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

....

Si nos fijamos atentamente, los coeficientes coinciden con los del triángulo de Pascal, los exponentes de "**a**" van disminuyendo desde **n** hasta **0** y los de **b** van aumentando desde **0** hasta **n**, y en cada término la suma de los exponentes de **a** y **b** es igual a **n**.

Generalizando:

$$(a + b)^n = a^n b^0 + a^{n-1} b^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a^1 b^{n-1} + a^0 b^n$$

11) Calcular $(a + b)^4$ y $(a + b)^5$.

12) Utilizando las fórmulas anteriores, desarrollar $(x + 5)^2$; $(x – 3)^2$ y $(x + 4)^3$

13) Calcular el noveno termino de $(v^2 – w)^{13}$.

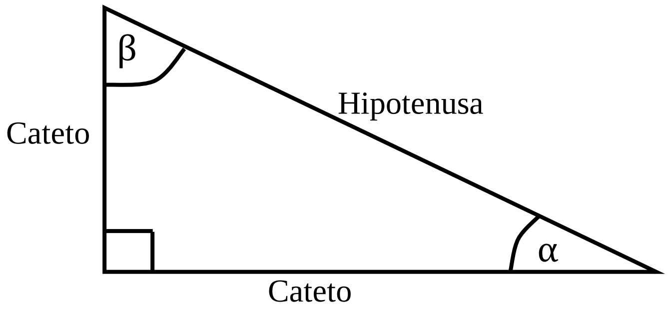
14) Verificar que el triángulo de Pascal se relaciona con combinaciones de la siguiente manera:

n = 0	$\binom{0}{0}$
n = 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
n = 2	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
n = 3	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
n = 4	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
n = 5	$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

Unidad N° 2: Trigonometría

La trigonometría es la parte de la matemática que estudio las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.

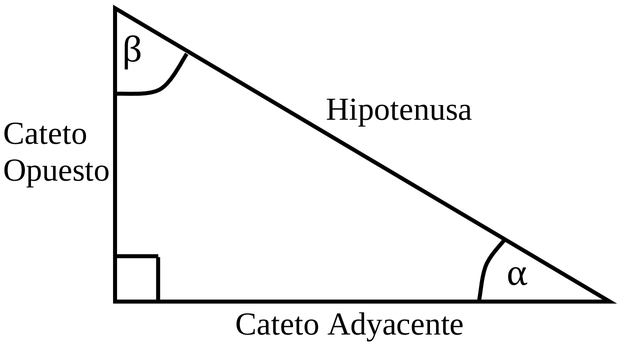
Primero vamos a estudiar los **Triángulos Rectángulos**.



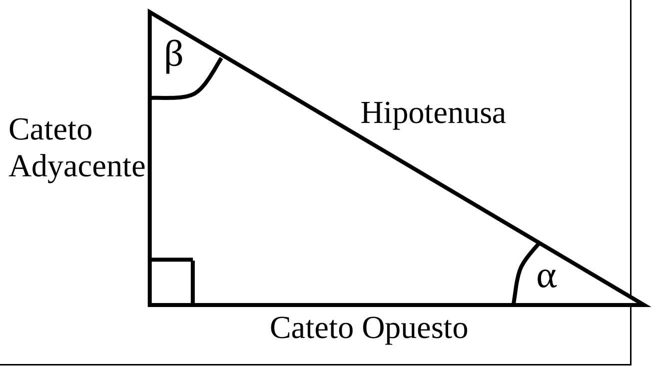
Llamamos **hipotenusa** al lado más grande del triángulo y **cateto** a los otros dos lados.

Ahora veamos lo siguiente:

Si nos ubicamos sobre el ángulo α, llamaremos **Cateto Opuesto** al lado opuesto al ángulo α y **Cateto Adyacente** al lado adyacente al ángulo α (Ver la figura).



Si nos ubicamos sobre el ángulo β, llamaremos **Cateto Opuesto** al lado opuesto al ángulo β y **Cateto Adyacente** al lado adyacente al ángulo β (Ver la figura).



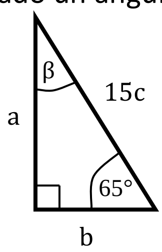
A partir de estos datos surgen tres relaciones muy importantes:

Seno α = $\frac{\textbf{Cateto Opuesto}}{\textbf{Hipotenusa}}$	**Coseno α** = $\frac{\textbf{Cateto Adyacente}}{\textbf{Hipotenusa}}$	**Tangente α** = $\frac{\textbf{Cateto Opuesto}}{\textbf{Cateto Adyacente}}$

Aclaración: Para las fórmulas se tomó de referencia al ángulo ∝, pero valen las mismas para el ángulo β.

¿Para qué sirven estas fórmulas? Estas fórmulas son muy útiles. Si para cualquier triángulo rectángulo, se tiene el valor de un lado y un ángulo, se pueden calcular los otros dos lados usando dichas fórmulas. Y si tenemos como dato el valor de dos lados, se pueden calcular los ángulos y el lado que falta.

Ejemplo: Dado un ángulo y un lado:



Los datos que faltan son el lado **a**, el lado **b** y el ángulo β.

Si queremos averiguar el valor del lado **a**, vemos que ese lado es el **cateto opuesto** al ángulo de 65°, por otro lado, tenemos como dato que la **hipotenusa** es 15cm. Por lo tanto, queremos averiguar el valor del cateto opuesto al ángulo de 65° y tenemos como dato la hipotenusa. Por lo tanto debemos usar **Seno**.

Seno 65° = $\frac{a}{15cm}$ $\Rightarrow$ Seno 65°. 15cm = a $\Rightarrow$ **a = 13,59cm.**

Para averiguar el valor del lado b, podemos utilizar otra de las funciones trigonométricas, o bien utilizar el **Teorema de Pitágoras:**

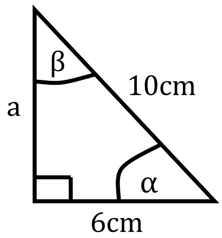
b = $\sqrt{(15cm)^2 - (13{,}59cm)^2}$ = $\sqrt{225cm^2 - 184{,}69cm^2}$ = $\sqrt{40{,}31cm^2}$ = 6,35cm.

Por lo tanto **b = 6,35cm.**

Para calcular el valor del ángulo β, sólo hay que recordar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Teniendo un ángulo de 90° y un ángulo de 65°, fácilmente podemos calcular el valor de β.
β = 180° - 90° - 65° ⇒ **β = 25°**

Veamos un ejemplo dados como datos el valor de dos lados.

Ejemplo: Dados dos lados:



Los datos que faltan son el lado **a** y los ángulos α y β.
Si queremos averiguar el valor del ángulo α, vemos que tenemos como dato el **cateto adyacente** al ángulo α (6cm) y la **hipotenusa** (10cm). Por lo tanto debemos usar **Coseno**.

Coseno α = $\frac{6}{10}$ ⇒ Coseno α = 0,6

¿Cómo utilizar la calculadora?

Luego de hacer la división $\frac{6}{10}$, en la pantalla de la calculador aparecerá el resultado, o sea 0,6.
Sin borrar ese resultado tecleamos:

SHIFT o **2NDF** o **INV** (Según la calculadora utilizada)
Luego la función trigonométrica que utilizamos en el planteo: **sin**, **cos** o **tan** (En este caso **cos**) (En la pantalla aparecerá **cos^{-1}**).
Luego presionamos **ANS** (En la pantalla aparecerá **cos^{-1} ANS**)
Finalmente la tecla **"="** y para pasar el resultado a sistema sexagesimal teclear **° ' "**

Siguiendo todos estos pasos obtenemos que **∝= 53° 7' 48,37''**
Para obtener el valor de β procedemos fácilmente, ya que tenemos el valor de dos ángulos del triángulo y sólo falta β, por lo tanto β = 180° - 90° - 53° 7' 48,37''. Obtenemos finalmente que: **β= 36° 52' 11,63''**
Sólo falta averiguar el valor del lado **a**. Esto se puede hacer utilizando alguna de las funciones trigonométricas o bien con el Teorema de Pitágoras.

Utilizando Pitágoras:
a = $\sqrt{(10\text{cm})^2 - (6\text{cm})^2}$
a = $\sqrt{100\text{cm}^2 - 36\text{cm}^2}$
a = $\sqrt{64\text{cm}^2}$
a = 8cm

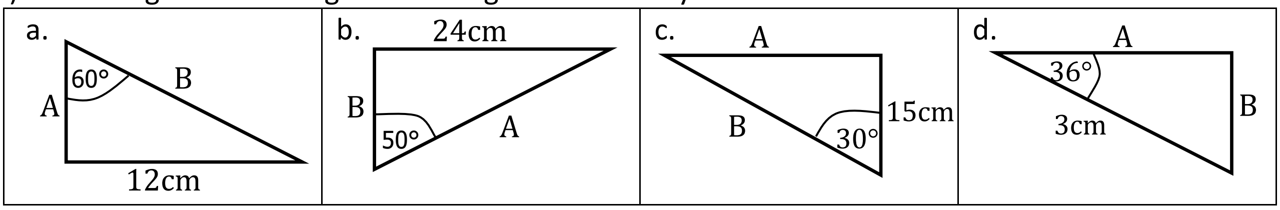
Utilizando Seno
Sin 53° 7' 48,37'' = $\frac{a}{10\text{cm}}$
Sin 53° 7' 48,37''. 10cm = a
a = 8cm

Utilizando Tangente
Tan 53° 7' 48,37''= $\frac{a}{6\text{cm}}$
Tan 53° 7' 48,37''. 6cm = a
a = 8cm

¿Se podría utilizar otra función trigonométrica para averiguar el valor de **a**? ¿Cuál?

Actividades

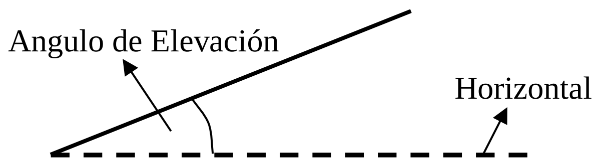
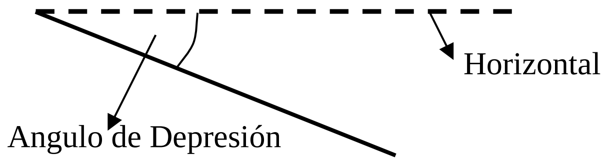
1) En los siguientes triángulos rectángulos: Hallar A y B:



2) Calcular la altura a la que se encuentra un barrilete si el ángulo que forma el hilo, de 35m de longitud con la horizontal, es de 30° y la mano del niño que sostiene el hilo está a 80cm del suelo.

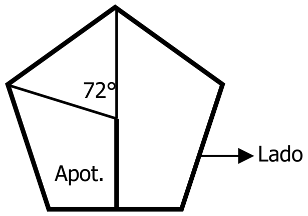
3) Desde una distancia de 26m del pie de una torre, el ángulo de elevación a la cúspide es 36°. Determinar la altura de la torre y la distancia del observador a la cúspide.

4) Un poste de electricidad de 4 metros de altura se debe sujetar con unos tensores desde su extremo superior al piso. Los expertos recomiendan que el ángulo de inclinación de los tensores con el suelo debe ser de 50°. ¿Cuál debe ser la longitud de los tensores?

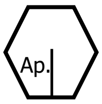
Para recordar	
Angulo de elevación: es el ángulo que se mide a partir de la horizontal hacia arriba. 	**Angulo de depresión:** el ángulo que se va a medir por debajo de la horizontal. 

5) Determinar la distancia de un observador a la cúspide de una iglesia que tiene 120 metros de alto, sabiendo que el ángulo de elevación es de 41°.

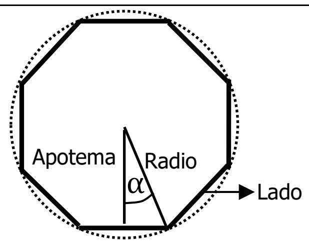
6) Calcular la apotema de un pentágono regular de 12cm de lado (Recordar que los ángulos centrales del pentágono regular miden 72° y que la apotema es el segmento que une el centro con la mitad de uno de los lados, cortando al mismo perpendicularmente).



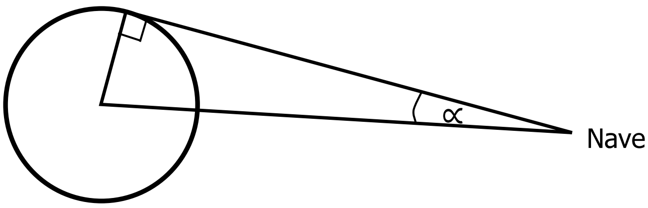
7) ¿Cuál es el doble de la apotema de un hexágono regular de lado 5cm?



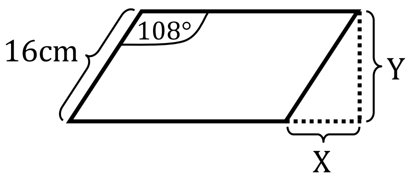
8) Calcular el valor del lado de un octógono inscripto en una circunferencia de 10cm de radio.



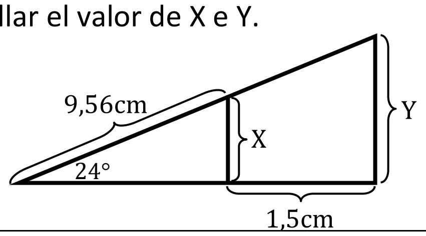
9) Desde una nave espacial se ve la Tierra bajo un ángulo ∝ = 20° 9' 48''. Siendo el radio de la Tierra de 6366km, calcular la distancia de la nave a la superficie de la terrestre.



10) Hallar el valor de X e Y.



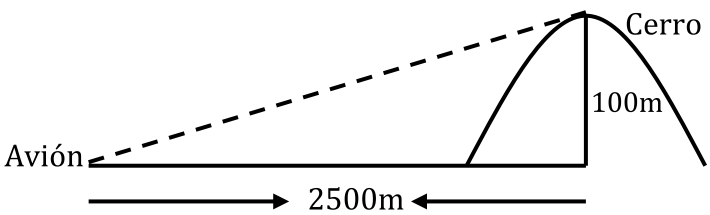
11) Hallar el valor de X e Y.



12) Una escalera de 3m de largo está apoyada sobre la pared de un edificio; estando su base a 1,5m del edificio. ¿Qué ángulo forma la escalera con el piso?

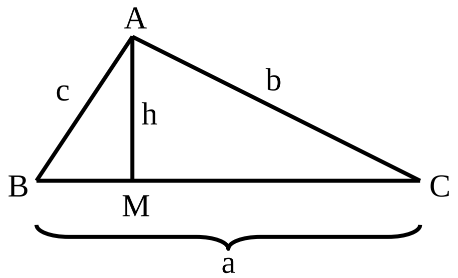
13) El palo central de una tienda de campaña de forma de cono circular tiene una altura de 6m y su parte superior está sostenida por cuerdas de 12m de largo amarradas a estacas clavadas en la tierra. ¿A qué distancia están las estacas del pie del mástil central? ¿Cuál es la inclinación de las cuerdas con respecto al suelo?

14) Determinar al ángulo de inclinación mínimo necesario para que el avión de la figura pueda despegar sobrevolando el cerro.



Relaciones entre los lados y los ángulos de cualquier triángulo
Teorema del seno

Dado un triángulo cualquiera:



El Teorema del Seno dice que la razón entre los lados de cualquier triángulo y los senos de los ángulos opuestos es constante:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen}\ \hat{\mathbf{A}}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen}\ \hat{\mathbf{B}}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen}\ \hat{\mathbf{C}}}$$

<u>Demostración:</u> h es la altura correspondiente al lado **a** y lo corta en **M**. Esta altura divide al triángulo **ABC** en dos triángulos rectángulos, el ABM y el ACM.

En ACM: $\text{sen}\ \hat{C} = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad b.\ \text{sen}\ \hat{C} = h$

En ABM: $\text{sen}\ \hat{B} = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad c.\ \text{sen}\ \hat{B} = h$

O sea que: $\quad b.\ \text{sen}\ \hat{C} = c.\ \text{sen}\ \hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}}$

Si se realiza un análisis similar al anterior pero trazando la altura correspondiente al lado b, se obtiene que:

$$\frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}}$$

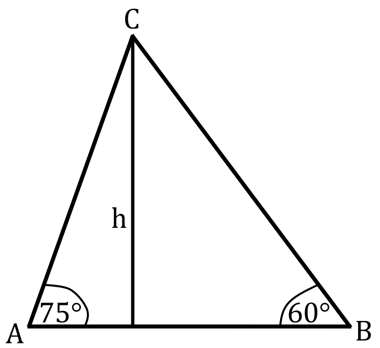
O sea que, teniendo en cuenta lo anterior, llegamos a lo que se llama el **Teorema del seno**:

$$\boxed{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen}\ \hat{\mathbf{A}}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen}\ \hat{\mathbf{B}}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen}\ \hat{\mathbf{C}}}}$$

Ejemplo:

Un bote tiene dos opciones para atracar en la costa, el punto A o el punto B. Para alcanzar el primero debe seguir una dirección que forme un ángulo de 75° con la orilla, o bien, para el punto B, debe recorrer 9,5Km hasta la orilla tomando un ángulo de dirección de 60° con ésta.

¿Hacia qué punto (A o B) recorrerá menor distancia el bote? ¿A qué distancia está el bote de la orilla?



El valor del lado $\overline{CB}$ ya está dado y es 9,5Km. Por lo tanto:

$\frac{9,5\ \text{km}}{\text{sen}\ 75°} = \frac{\overline{CA}}{\text{sen}\ 60°} \Rightarrow \frac{9,5\ \text{km}\ .\ \text{sen}\ 60°}{\text{sen}\ 75°} = \overline{CA}$, o sea que:

$\overline{CA}$ = 8,52 Km. Por lo tanto, recorrerá menor distancia si se dirige hacia el punto A.

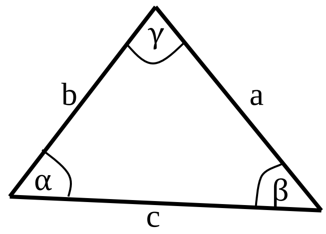
Por otro lado, para averiguar la distancia a la que se encuentra el bote de la orilla, debemos averiguar el valor de h. Para eso podemos utilizar alguna de las funciones trigonométricas.

Por ejemplo: $\text{sen}\ 60° = \frac{h}{9,5\ \text{km}} \Rightarrow$ sen 60°. 9,5Km = h, o sea que:

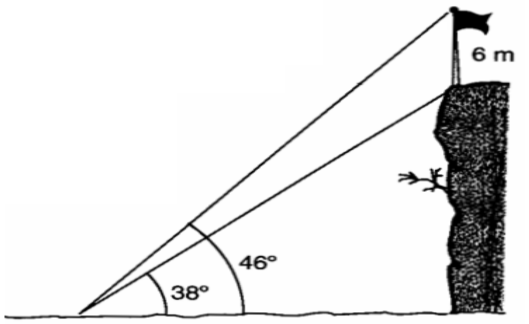
h = 8,22Km.

Actividades

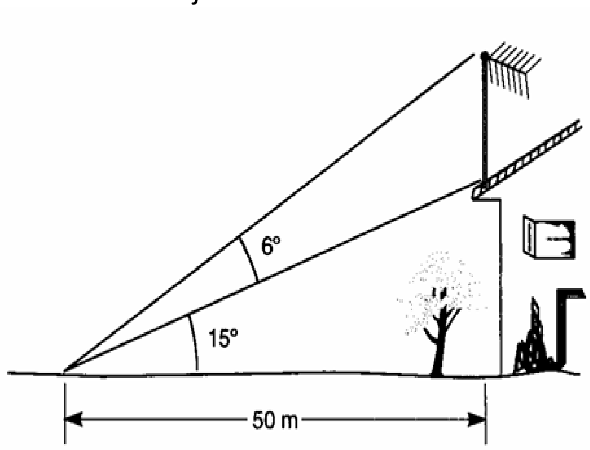
1) En el triángulo de la figura hallar los valores de los lados y ángulos que faltan:
   a. $\boldsymbol{\gamma}$ = 70º ; b = 6cm ; c = 10cm
   b. β = 150º ; b = 50m ; c = 8m
   c. β = 62º ; a = 7cm ; b = 8cm
   d. ∝ = 32,5º ; a = 13m ; c = 15m



2) Desde un punto al ras de suelo, los ángulos de elevación que presentan la base y la punta de un mástil de 6m de altura, colocado sobre un acantilado, son 38º y 46º. Hallar la altura del acantilado.

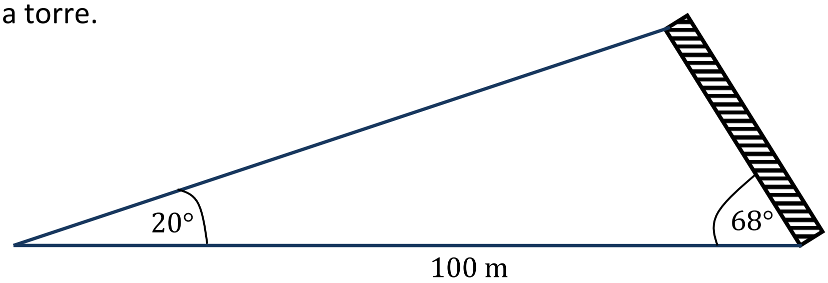


3) Calcular la altura de la antena que está sobre el tejado de la casa.



4) Una bandera está atada a un mástil de una altura de 3 metros. Los ángulos de elevación al punto superior e inferior de la bandera son de 60º y 30º respectivamente. Determinar el alto de la bandera.

5) Un hombre mide el ángulo de elevación de una torre desde un punto situado a 100m de ella. Si el ángulo medido es de 20º y la torre forma un ángulo de 68º con el suelo, determinar la altura de la torre.



6) Desde un punto del suelo se observa la parte más alta de un edificio con un ángulo de 30º, si avanzamos 30m acercándonos al edificio, el ángulo pasa a ser de 45º ¿Cuál es la altura del edificio?

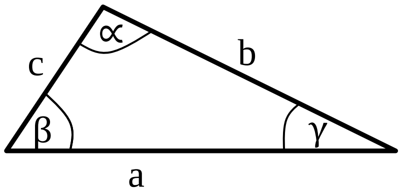
7) ¿Cuál es el perímetro y el área de un triángulo isósceles cuyo ángulo no basal mide 30º y su base mide 25cm?

8) La sombra que proyecta una torre cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 23º 25' es de 12,5 metros. Calcular la altura de la torre, y la longitud que tendrá la sombra cuando la inclinación de los rayos sea de 35º 21'.

9) Los ángulos de depresión a la cúspide y base de un monumento, vistos desde la terraza de un edificio de 30m de altura son 65º y 30º. Determinar la altura del monumento.

Teorema del coseno

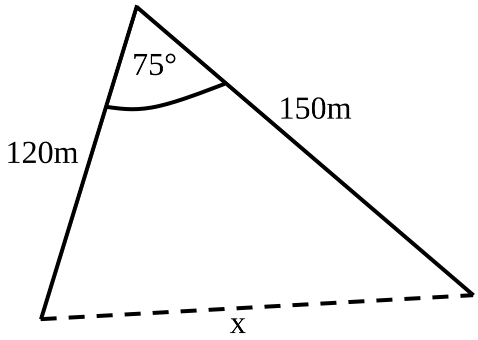
Dado un triángulo cualquiera:



El teorema del Coseno dice que el cuadrado del tercer lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de ambos lados, multiplicados por el coseno del ángulo que forman.

$$\boxed{\begin{array}{c} a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \propto \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \gamma \end{array}}$$

Ejemplo: Desde la intersección de dos calles parten dos vehículos al mismo tiempo recorriendo en línea recta 150m y 120m respectivamente. Si se sabe que el ángulo formado por ambas calles en la intersección es de 75°, ¿a qué distancia geométrica están los autos entre sí?



$x^2 = (120m)^2 + (150m)^2 - 2.120m.150m.\cos 75°$

$x^2 = 27582{,}51438\ m^2$

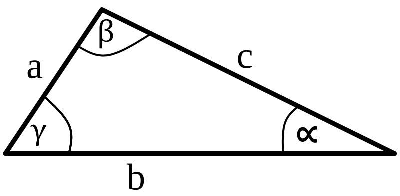
$x = \sqrt{27582{,}51438\ m^2}$

$x = 166{,}08\ m$

O sea que los dos vehículos están a 166,08m de distancia entre sí.

Actividades

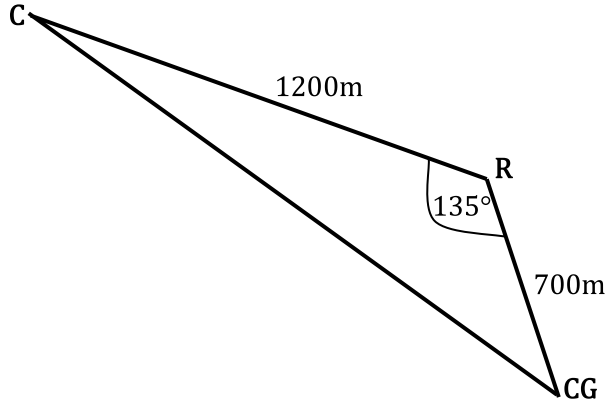
1) En el triángulo de la figura hallar los valores de los lados y ángulos que faltan:



a)	$\alpha = 50°$	$\beta =$	$\gamma =$	a =	b = 12cm	c = 10cm
b)	$\alpha =$	$\beta = 120°$	$\gamma =$	a = 8cm	b =	c = 10cm
c)	$\alpha =$	$\beta =$	$\gamma = 70°$	a = 20cm	b = 16cm	c =
d)	$\alpha =$	$\beta = 92°$	$\gamma =$	a = 47cm	b =	c = 31cm
e)	$\alpha =$	$\beta =$	$\gamma =$	a = 26cm	b = 28cm	c = 20cm
f)	$\alpha =$	$\beta =$	$\gamma =$	a = 9cm	b = 15cm	c = 12cm
g)	$\alpha =$	$\beta =$	$\gamma =$	a = 28m	b = 35m	c = 26m

2) Tres pueblos A, B y C están unidos por rutas rectas y llanas. La distancia AB es de 6km, la BC es 9km y al ángulo que forman AB y BC es de 120°.
   a. ¿Cuál es la distancia entre el pueblo A y el pueblo C?
   b. Hallar los ángulos que faltan en el triángulo ABC.

3) En un parque de una región montañosa es dificultoso medir la distancia que hay entre un castillo y la casa del guarda parque.
Sin embargo, pudo medirse la distancia entre ésta y el restaurante (700m) y también entre el restaurante y el castillo (1200m), sabiendo que esos dos caminos convergen en el restaurante formando un ángulo de 135°.
¿Qué distancia hay entre el castillo y la casa del guarda parque?



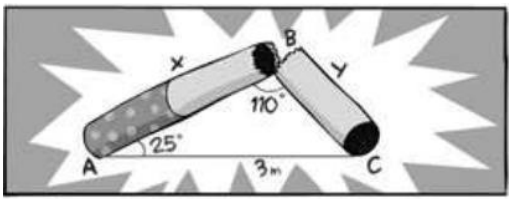
4) Dos barcos A y B zarpan a las 12:00 horas desde un mismo punto alejándose uno del otro según un ángulo de 120°. Si el barco A se desplaza en línea recta a 6Km/h y el B a 4Km/h. ¿A qué distancia está uno del otro a las 16:00 horas?

5) Dos personas caminan por un sendero, pero en un punto se separan formando un ángulo de 38° y cada uno va por su lado en línea recta, uno camina a 3Km/h y el otro a 3,5Km/h, ¿A qué distancia se encuentran al cabo de dos horas?

6) En una competencia de natación dos amigos parten lanzándose al agua desde una balsa al mismo tiempo, el primero nada a una velocidad promedio de 6Km/h y el segundo a 5Km/h.
Comienzan a alejarse entre sí con un ángulo de 35°; después de media hora de competencia el segundo sufre un calambre. ¿Qué distancia recorrerá el primero para ir en su auxilio y qué ángulo tendrá la nueva dirección de éste?

7) Dos personas van por un camino, pero en un punto hay una bifurcación formándose dos caminos con un ángulo de 45° entre ellos. Cada uno toma un camino distinto, el primero avanza a una velocidad de 4km/h y el segundo a 5,6k/h.
¿A qué distancia se encuentran uno del otro luego de tres horas y media?

8) Este es el cartel de una campaña publicitaria contra el tabaco. ¿Cuánto mide el cigarro que aparece en él?



9) Una escalera se halla afirmada contra un muro formando un ángulo de 75° con el suelo. Dos observadores ubicados a nivel del suelo a una distancia de 6 metros uno del otro, ven el extremo de la escalera con un ángulo de elevación de 30° y 45° respectivamente. Determinar la longitud de la escalera.

10) Dos trenes parten simultáneamente de una estación en dirección tal que forman un ángulo de 35°. Uno va a 15Km/h y el otro a 25Km/h. Determinar a qué distancia se encuentran separados después de dos horas de viaje.

11) Una persona se encuentra en la ventana de su departamento que está situada a 8m del suelo y observa el edificio de enfrente de la siguiente manera: la parte superior, con un ángulo de elevación de 35° y la parte inferior, con un ángulo de depresión de 43°. Determina la altura del edificio de enfrente.

La fórmula de Herón

El matemático griego Herón de Alejandría (siglo II) descubrió una fórmula actualmente conocida como "la fórmula de Herón", que permite calcular el área de un triángulo conociendo las medidas de sus tres lados y sin usar trigonometría. Los traductores árabes de los manuscritos griegos afirmaron que aquella famosa fórmula se debe, en realidad, al matemático griego Arquímedes (287-212 a.C.). Sea uno u otro el descubridor, la primera demostración de esta fórmula que nos ha llegado es la de Herón.

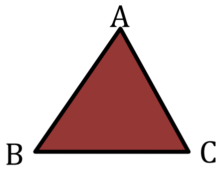
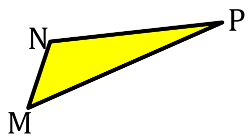
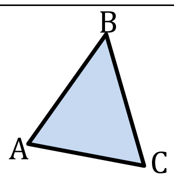
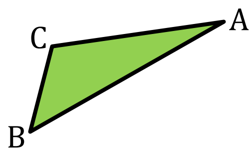
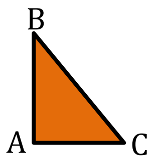
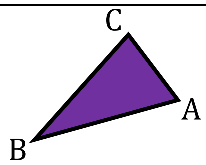
La siguiente expresión es la fórmula de Herón para el área **A** de un triángulo conociendo las medidas **a**, **b** y **c** de sus lados:

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{s}.(\mathbf{s}-\mathbf{a}).(\mathbf{s}-\mathbf{b}).(\mathbf{s}-\mathbf{c})}$$

Donde **s** es el semiperímetro del triángulo, es decir: $\mathbf{s} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{\mathbf{2}}$

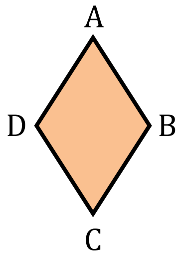
Actividades

1) Calcular el área de cada uno de los siguientes triángulos utilizando la fórmula de Herón:

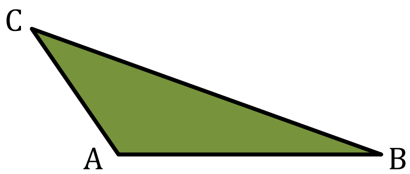
a. Datos: $\overline{AB}$ = 4cm $\overline{BC}$ = 6cm $\overline{AC}$ = 9cm 	b. Datos: $\overline{MN}$ = 3,2cm $\overline{MP}$ = 8,1cm $\overline{PN}$ = 6,6cm 
c. Datos: $\overline{AB}$ = 16cm $\overline{AC}$ = 7cm $\hat{A}$= 53° 	d. Datos: $\overline{CB}$ = 46cm $\overline{CA}$ = 58cm $\hat{C}$= 145° 
e. Datos: $\overline{AB}$ = 11cm $\overline{AC}$ = 9cm 	f. Datos: $\overline{AB}$ = $\overline{BC}$ =20cm $\hat{A}$= 62° 

2) Con los datos que figuran abajo, calcular el área del rombo ABCD.

$\overline{AB}$ = 7cm
$\hat{A}$= 48°



3) Calcular el área del triángulo ABC.
$\overline{AC}$ = 48m
$\overline{AB}$ = 57m
$C\hat{A}B$= 117°



4) Ismael quiere fertilizar su terreno. Cada bolsa de fertilizante asegura cubrir 500 metros cuadrados de pasto. Su propiedad tiene la forma de un triángulo. El calcula que dos lados de su jardín son de 75 y 100 metros y el ángulo entre ellos es 71°. ¿Cuántas bolsas de fertilizante debe comprar aproximadamente para cubrir todo el terreno?

5) Un terreno triangular cuyos lados miden 72m, 85m y 103m se vende a un valor de U$D25 el metro cuadrado. ¿Cuál es el valor total del campo?

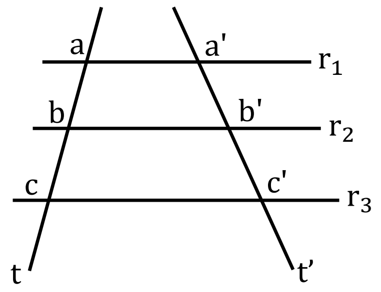
Unidad N° 3: Teorema de Tales. Congruencia y Semejanza

Teorema de Tales

La mayoría de los conceptos geométricos que ustedes estudian en el colegio formaban parte del enorme saber de los antiguos matemáticos griegos que vivieron, aproximadamente, a partir del siglo VI A.C. Estos hombres quisieron conocer los misteriosos mecanismos de la naturaleza y emplearon la matemática, y en especial la geometría, para tal fin. Suele considerarse a Tales de Mileto como el primer matemático de la historia. En su juventud fue un hombre de negocios, hasta que, cansado de su vida de mercader, se dedicó a viajar y a pensar. Aunque nada escribió, se cree que conocía y utilizaba el famoso teorema que hoy lleva su nombre.

¿Qué es lo que enuncia el teorema de Tales?

Supongamos que tenemos tres rectas paralelas y dos rectas transversales a ellas:



$r_1 \mathbin{/\!/} r_2 \mathbin{/\!/} r_3$

t y t’: Rectas transversales.

Al cortar t y t’ a las rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, quedan determinados, sobre aquellas rectas, varios segmentos:

Sobre la recta **t**: segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$

Sobre la recta **t’**: segmentos $\overline{a'b'}$ y $\overline{b'c'}$

Suele decirse que $\overline{a'b'}$es el segmento correspondiente de $\overline{ab}$ y, de manera similar, $\overline{b'c'}$ es el segmento correspondiente de $\overline{bc}$.

El teorema de Tales afirma que, bajo las condiciones dadas en la figura anterior, los segmentos que están sobre una de las transversales son proporcionales a los segmentos correspondientes sobre la otra transversal, es decir:

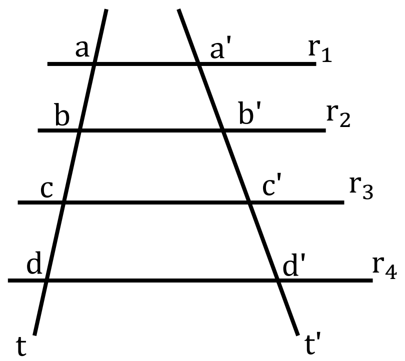
$$\frac{\overline{\mathbf{ab}}}{\overline{\mathbf{bc}}} = \frac{\overline{\mathbf{a'b'}}}{\overline{\mathbf{b'c'}}}$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que los segmentos de la figura anterior tienen estas medidas: $\overline{ab} = 2$, $\overline{bc} = 7$ y $\overline{a'b'} = 6$. Se quiere hallar la medida del segmento $\overline{b'c'}$. De acuerdo con el teorema de Tales, dichos segmentos son proporcionales, es decir:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{b'c'}} \Longrightarrow \frac{2}{7} = \frac{6}{\overline{b'c'}} \Longrightarrow 2.\,\overline{b'c'} = 6\,.\,7 \Longrightarrow \overline{b'c'} = \frac{6\,.\,7}{2} \Longrightarrow \overline{b'c'} = 21.$$

Es fácil verificar, ahora, la validez de esta proporción: $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$

Al aplicarse el teorema de Tales pueden tomarse, sobre una de las transversales, cualesquiera dos segmentos, siempre que se tomen los segmentos correspondientes sobre la otra transversal. Por ejemplo:



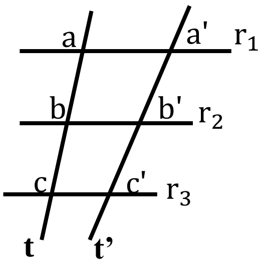
$r_1 \mathbin{/\!/} r_2 \mathbin{/\!/} r_3 \mathbin{/\!/} r_4$

t y t’: Rectas transversales.

$\frac{\overline{bc}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{b'c'}}{\overline{c'd'}}$ o $\frac{\overline{bd}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{b'd'}}{\overline{a'c'}}$ o $\frac{\overline{ad}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{a'd'}}{\overline{c'd'}}$, etc.

Actividades

1) Hallar el valor de $\overline{ab}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3$

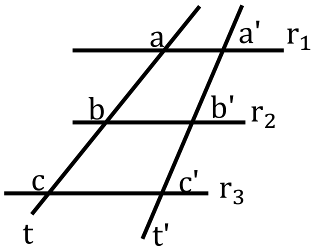
t y t': Rectas transversales.

$\overline{bc} = 7{,}5cm$

$\overline{a'b'} = 8$ cm

$\overline{b'c'} = 6$ cm

2) Hallar el valor de $\overline{b'c'}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3$

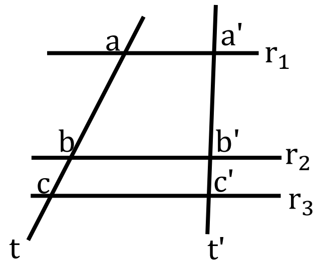
t y t': Rectas transversales.

$\overline{ac} = 24cm$

$\overline{bc} = 9cm$

$\overline{a'c'} = 20cm$

3) Hallar el valor de $\overline{ac}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3$

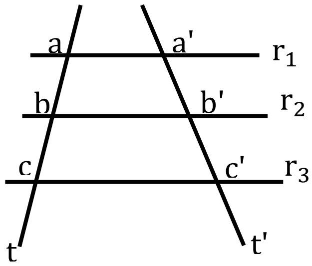
t y t': Rectas transversales.

$\overline{bc} = 40cm$

$\overline{b'c'} = 32cm$

$\overline{a'b'} = 54cm$

4) Hallar el valor de $\overline{a'b'}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3$

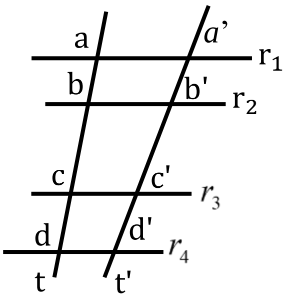
t y t': Rectas transversales.

$\overline{ab} = 15cm$

$\overline{bc} = 17{,}5cm$

$\overline{b'c'} = 21cm$

5) Hallar el valor de $\overline{bc}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3 /\!/ r_4$

t y t': Rectas transversales.

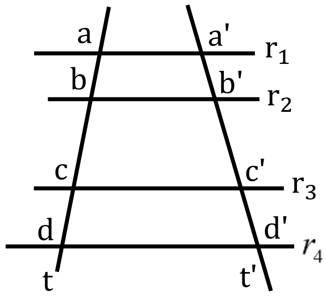
$\overline{ab} = 4{,}5cm$

$\overline{a'b'} = 5cm$

$\overline{b'd'} = 24cm$

$\overline{c'd'} = 6cm$

6) Hallar el valor de $\overline{b'c'}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3 /\!/ r_4$

t y t': Rectas transversales.

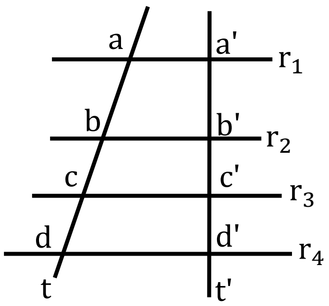
$\overline{ad} = 18cm$

$\overline{ac} = 12cm$

$\overline{a'c'} = 15cm$

$\overline{b'd'} = 20cm$

7) Hallar el valor de $\overline{b'd'}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3 /\!/ r_4$

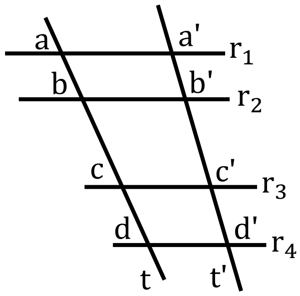
t y t': Rectas transversales.

$\overline{bc} = \overline{cd} = 27cm$

$\overline{ab} = 36cm$

$\overline{a'c'} = 56cm$

8) Hallar el valor de $\overline{cd}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3 /\!/ r_4$

t y t': Rectas transversales.

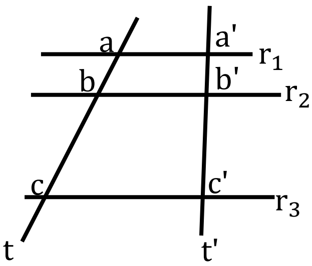
$\overline{ac} = 60cm$

$\overline{a'b'} = 16cm$

$\overline{ab} = 20cm$

$\overline{b'd'} = 58cm$

9) Hallar el valor de $\overline{b'c'}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3$

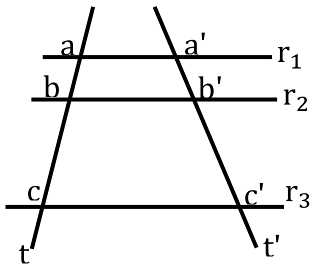
t y t': Rectas transversales.

$\overline{ab} = 108cm$

$\overline{a'b'} = 105cm$

$\overline{bc} = 324cm$

10) Hallar el valor de $\overline{a'b'}$



Datos:

$r_1 /\!/ r_2 /\!/ r_3$

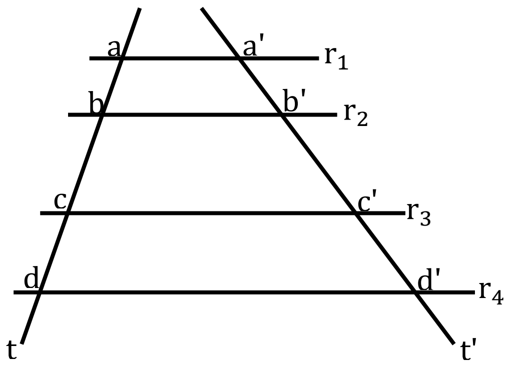
t y t': Rectas transversales.

$\overline{ab} = 5cm$

$\overline{bc} = 12cm$

$\overline{b'c'} = 18cm$

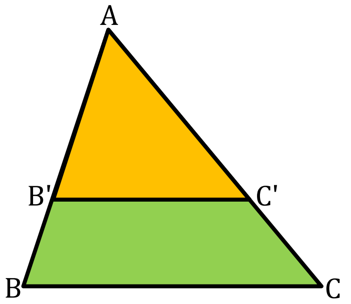
11) Hallar el valor de **x** y de cada uno de los segmentos dados en donde aparece la incógnita **x**. (El siguiente gráfico es la referencia para resolver los ejercicios que están a continuación):



a) $\overline{ac}$= 8x + 1cm $\overline{cd}$ = 5x – 2cm $\overline{a'c'}$ = 12cm $\overline{c'd'}$ = 4cm	b) $\overline{ac}$ = 2x + 2cm $\overline{bc}$ = 5x – 6cm $\overline{a'c'}$ = 9cm $\overline{b'c'}$ = 6cm	c) $\overline{ab}$ = x + 1cm $\overline{cd}$ = 3x – 3cm $\overline{a'b'}$ = 5cm $\overline{c'd'}$ = 7,5cm	d) $\overline{ab}$ = 2x - 3cm $\overline{ad}$ = 2x + 12cm $\overline{a'b'}$ = 6cm $\overline{a'd'}$ = 24cm
e) $\overline{ab}$ = 2x $\overline{bd}$ = 5x – 5cm $\overline{a'b'}$ = 8cm $\overline{a'd'}$ = 24cm	f) $\overline{bc}$ = x + 1cm $\overline{bd}$ = 2x – 2cm $\overline{b'c'}$ = 14cm $\overline{c'd'}$ = 6cm	g) $\overline{ac} = \frac{3}{7}x + 1cm$ $\overline{cd} = \frac{1}{2}x - 1{,}5cm$ $\overline{a'c'}$ = 6cm $\overline{c'd'}$ = 3cm	h) $\overline{bc} = \frac{3}{8}x + 1cm$ $\overline{ad} = \frac{1}{2}x + 6cm$ $\overline{b'c'}$ = 6cm $\overline{a'd'}$ = 15cm
i) $\overline{ab} = \frac{5}{9}x + 1cm$ $\overline{bd} = \frac{1}{3}x + 7cm$ $\overline{a'b'}$ = 9cm $\overline{a'd'}$ = 24cm	j) $\overline{cd} = \frac{7}{10}x - 5cm$ $\overline{bd} = \frac{1}{2}x + 1cm$ $\overline{b'c'}$ = 5cm $\overline{c'd'}$ = 2,5cm	k) $\overline{bc} = \frac{3}{11}x + 1cm$ $\overline{cd}$ = x – 7cm $\overline{b'c'}$ = 7cm $\overline{b'd'}$ = 14cm	l) $\overline{ab} = \frac{5}{6}x - 6cm$ $\overline{bc} = \frac{1}{3}x + 4cm$ $\overline{a'b'}$ = 5cm $\overline{a'c'}$ = 15cm
m) $\overline{ab}$ = x $\overline{bc}$=5,2cm $\overline{a'b'}$= x - 3cm $\overline{b'c'}$ = 2,6cm	n) $\overline{bc}$ = 2x + 1cm $\overline{cd}$ = x + 2cm $\overline{b'c'}$ = 8cm $\overline{c'd'}$ = 6cm	o) $\overline{a'b'}$ = 9cm $\overline{ab}$ = 5x - 7cm $\overline{b'c'}$ = 4cm $\overline{bc}$ = 2x - 2cm	p) $\overline{a'b'}$ = 4x + 4cm $\overline{ab}$= 5x + 2cm $\overline{b'c'}$ = 6cm $\overline{bc}$ = 7cm

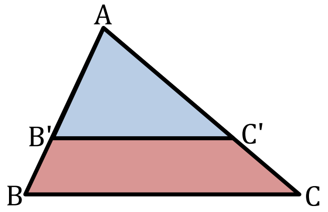
El teorema de Tales en un triángulo

Dado un triángulo ABC, si se traza un segmento paralelo, $\overline{b'c'}$ a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo AB'C', cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Ejemplo: Hallar la medida de los segmentos $\overline{AC'}$ y $\overline{BC}$ sabiendo que:



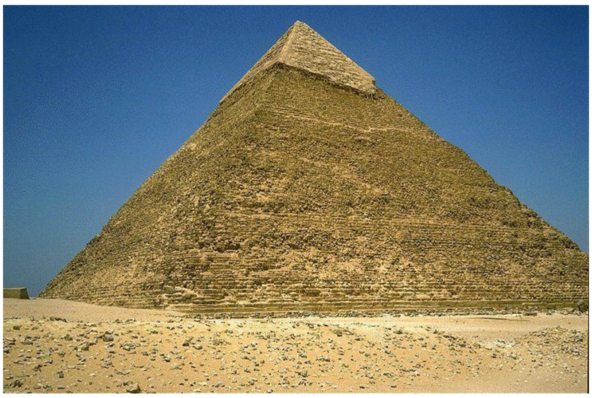
$\overline{AB}$ = 4cm
$\overline{AB'}$= 2cm
$\overline{AC}$ = 6cm
$\overline{B'C'}$= 4cm

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{4\text{cm}}{2\text{cm}} = \frac{\overline{BC}}{4\text{cm}} \Rightarrow 4\text{cm}.\ 4\text{cm} = \overline{BC}\ .\ 2\text{cm} \Rightarrow \frac{16\text{cm}^2}{2\text{cm}} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = \mathbf{8cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} \Rightarrow \frac{4\text{cm}}{2\text{cm}} = \frac{6\text{cm}}{\overline{AC'}} \Rightarrow \overline{AC'}\ .\ 4\text{cm} = 2\text{cm}\ .\ 6\text{cm} \Rightarrow \overline{AC'} = \frac{12\text{cm}^2}{4\text{cm}} \Rightarrow \overline{AC'} = \mathbf{3cm}$$

Un poco de historia

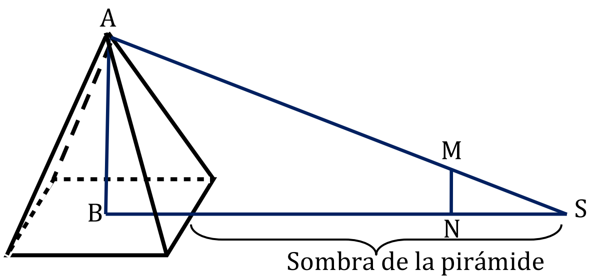
Muchos historiadores concuerdan en que el primer matemático fue el griego Tales de Mileto. Se cuenta que en las tierras del Nilo, los sacerdotes egipcios, poniéndolo a prueba, le preguntaron en cuánto estimaba la altura de la gran pirámide de Keops. Con la serenidad de un sabio, Tales respondió que, antes que estimarla, prefería medirla. Los egipcios, estupefactos, presenciaron la simple y maravillosa medición de Tales, quien, mediante un bastón y una proporción, logró rápidamente la proeza.



¿Cómo procedió Tales para medir la pirámide? Colocó un bastón $\overline{MN}$ en posición vertical, de manera que su sombra terminase en el mismo punto S que la sombra de la pirámide. Utilizando, luego, una sencilla proporción, calculó la altura $\overline{AB}$ de la pirámide.

a) ¿Qué proporción planteó Tales?

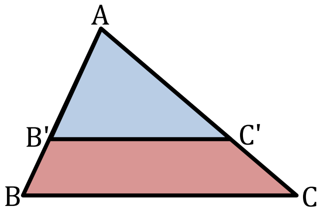
b) ¿Qué segmentos de los que intervienen en la proporción podían ser medidos en forma directa?



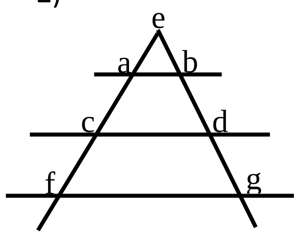
Actividades

1) Hallar la medida de los segmentos $\overline{AC'}$ y $\overline{BC}$

$\overline{AB}$ = 16cm
$\overline{AB'}$= 10cm
$\overline{AC}$ = 20cm
$\overline{B'C'}$ = 8cm

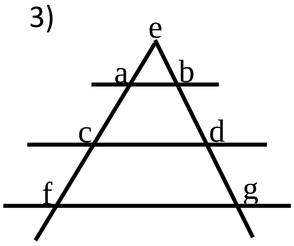


2)



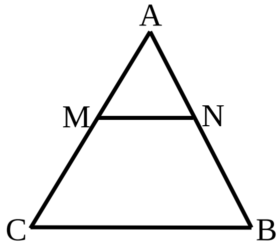
$\overline{ae}$ = 20cm
$\overline{ab}$ = 16cm
$\overline{ac}$ = 30cm
$\overline{bd}$ = 36cm
$\overline{dg}$ = 15cm
Hallar $\overline{eb}$, $\overline{fg}$, $\overline{cf}$ y $\overline{cd}$

3)



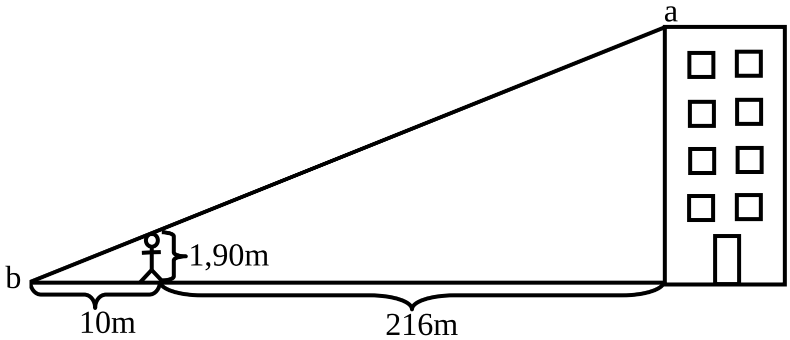
$\overline{ae}$ = 25cm
$\overline{ab}$ = 22cm
$\overline{ac}$ = 35cm
$\overline{bd}$ = 40cm
$\overline{dg}$ = 50cm
Hallar $\overline{eb}$, $\overline{fg}$, $\overline{cf}$ y $\overline{cd}$.

4) Calcular el perímetro del triángulo ABC, sabiendo que:

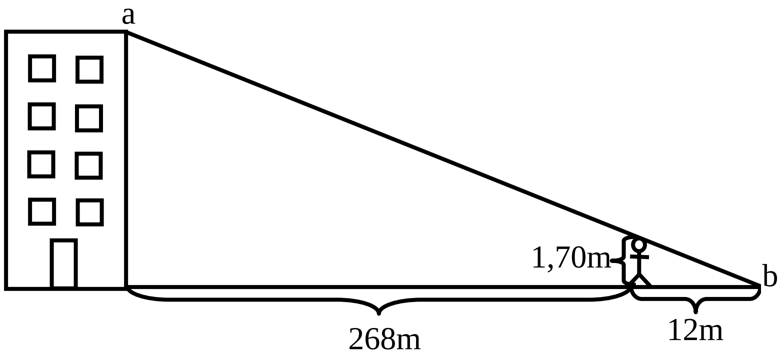


$\overline{AB}$ = 12m
$\overline{NB}$ = 7m
$\overline{MN}$ = 6m
$\overline{MC}$ = 14m

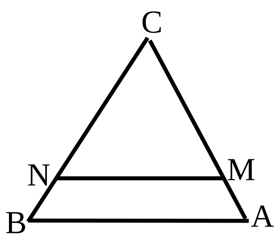
5) Hallar la altura del edificio y la longitud del segmento $\overline{ab}$:



6) Hallar la altura del edificio y la longitud del segmento $\overline{ab}$:



7) Hallar el perímetro del triángulo ABC.



a)
$\overline{MN}$ = 36cm
$\overline{CM}$ = 48cm
$\overline{AM}$ = 20cm
$\overline{BC}$ = 76,5cm

b)
$\overline{MN}$ = 60cm
$\overline{CM}$ = 57cm
$\overline{NB}$ = 21cm
$\overline{CA}$ = 76cm

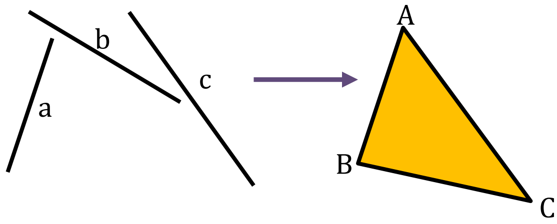
Congruencia y Semejanza de Figuras

Congruencia de figuras

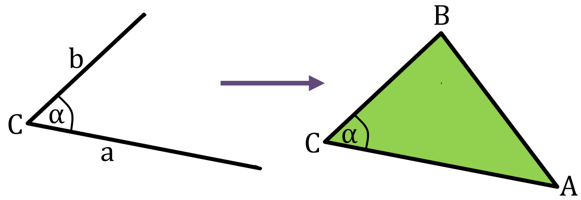
Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma, el mismo tamaño y la misma superficie, es decir, si al colocarlas una sobre la otra son coincidentes en toda su extensión.

Criterios de congruencia de triángulos:

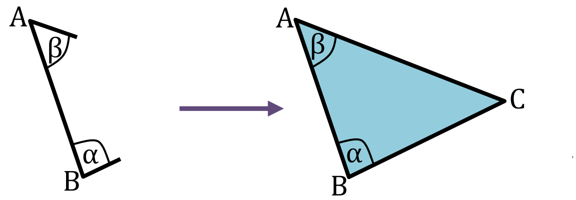
- **Criterio (LLL) (Tres lados congruentes)**: Si los tres lados de dos triángulos son respectivamente congruentes, los triángulos son congruentes.



- **Criterio (LAL) (Dos lados y el ángulo comprendido)**: Dos triángulos son congruentes si son respectivamente congruentes dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos

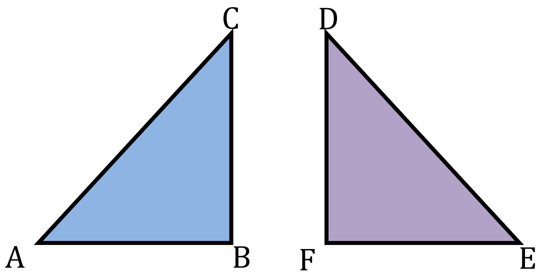


- **Criterio (ALA) (lado y ángulos adyacentes)**: Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes un lado y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado. A estos ángulos los llamaremos adyacentes al lado.

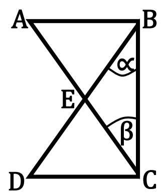


Actividades

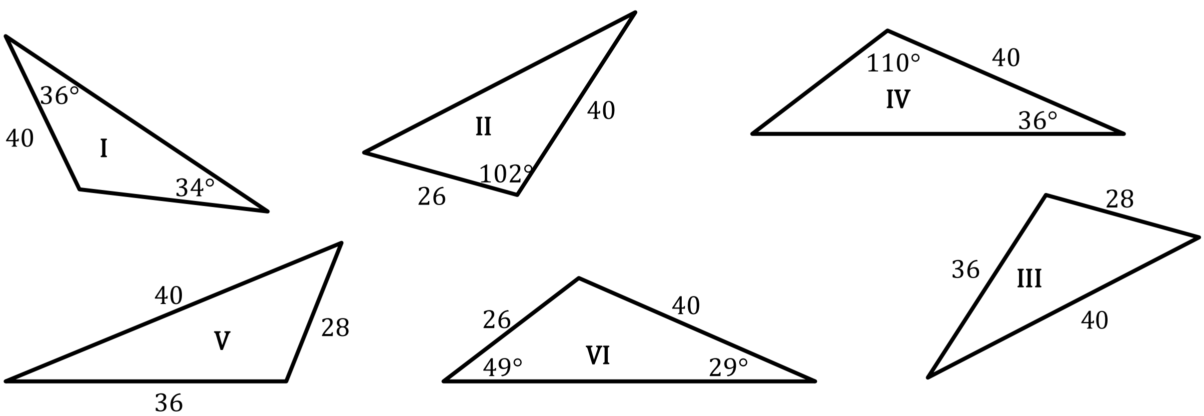
1) Dados los siguientes triángulos:
   a. Sabiendo que $\overline{AB}$ = $\overline{FE}$ =12cm, $\hat{E}$ = 53,13° y $\hat{C}$ = 36,87°, ¿se puede determinar que ABC y DEF son congruentes? ¿Por qué?
   b. Si $\overline{AC}$ =20cm, ¿cuánto miden $\overline{DF}$ y $\overline{DE}$?
   c. Cuál es la medida de los ángulos $\hat{D}$ y $\hat{A}$.



2) Dada la siguiente figura y sabiendo que ∝ = β, que AB//DC y que AB = DC.
   a. ¿ABC y BCD son triángulos congruentes? Justificar.
   b. ¿ABE y BCD son triángulos congruentes? Justificar.
   c. ¿ABE y CDE son triángulos congruentes? Justificar.



3) Determinar cuáles de los siguientes triángulos son congruentes indicando el criterio utilizado.

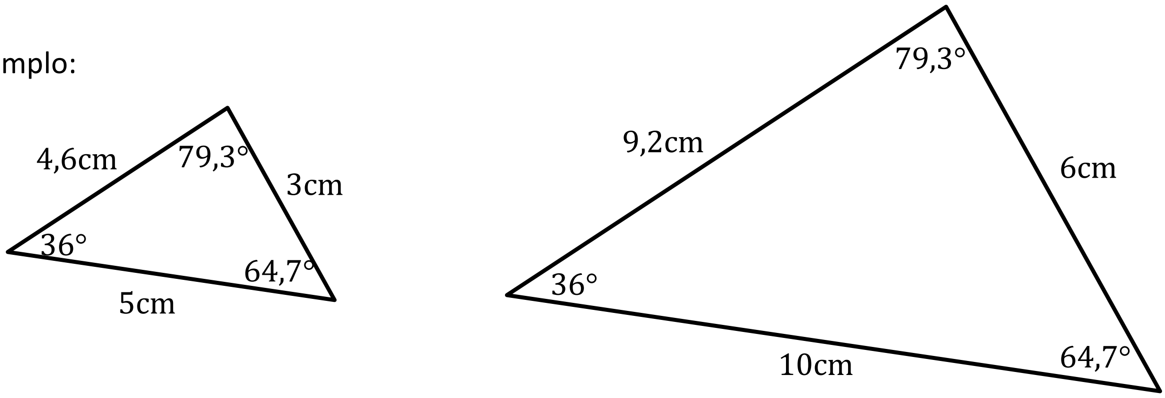


Semejanza de figuras

Dos figuras son semejantes cuando todos sus ángulos son congruentes y sus lados proporcionales.

Si dos figuras son semejantes, la constante de proporcionalidad de sus lados se llama *razón de semejanza* y se calcula como el cociente de las medidas de los lados correspondientes. Cuando la razón de semejanza entre dos figuras semejantes es $\frac{a}{b}$, en algunas notaciones se escribe que los lados están en razón a:b.

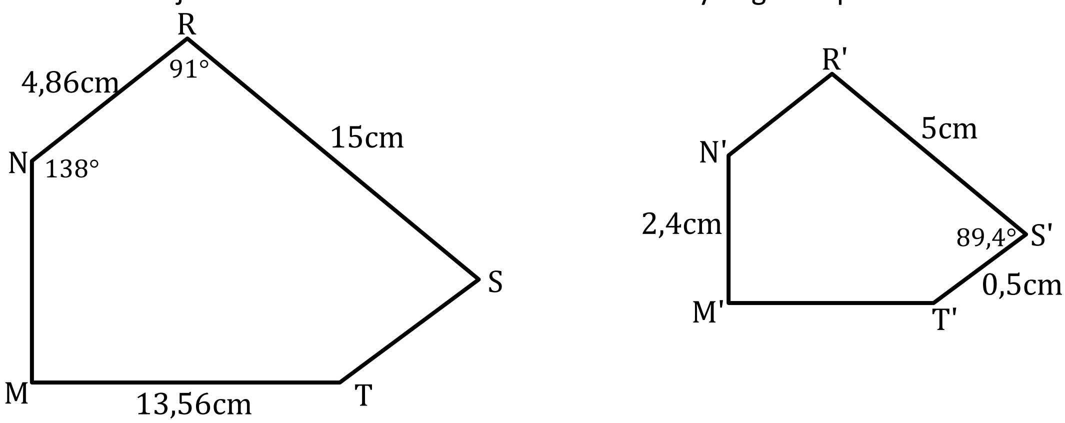
Ejemplo:



En este caso, los triángulos son semejantes, ya que tienen todos sus ángulos congruentes y los lados correspondientes proporcionales. La razón de semejanza es 2.

Actividades

1) Los números 2, 5 y 6 y los números 14, 35 y 42, ¿son proporcionales? ¿cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar de los primeros a los segundos?
2) Estas figuras son semejantes. Hallar el valor de todos los lados y ángulos que faltan:



3) Decidir si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
    a. Todos los cuadrados son semejantes.
    b. Todos los rombos son semejantes.
    c. Todos los rectángulos son semejantes.
    d. Todos los trapecios isósceles son semejantes.
    e. Todos los cuadriláteros son semejantes.

4) Los lados de un cuadrilátero miden 1,2cm; 2,1cm; 1,8cm y 2,4cm. ¿Cuánto mide cada uno de los lados de otro cuadrilátero, semejante a éste, si la razón de proporcionalidad entre ellos es 3? Utilizando esa razón, ¿hay una única respuesta posible?

5) El perímetro de un octógono regular es 10cm, ¿cuánto mide cada lado de un octógono semejante, cuyos lados son mayores, si la constante de proporcionalidad es $\frac{2}{3}$?

6) El perímetro de un hexágono regular es 18,96cm.
   a. ¿Cuál es el perímetro de otro hexágono, semejante a éste, cuyos lados son menores, sabiendo que la constante de proporcionalidad es $\frac{3}{4}$?
   b. ¿Cuánto mide cada lado de estos hexágonos?

7) Un edificio tiene 30m de altura, 10m de frente y 14m de fondo. Se desea construir una maqueta para mostrarla en el salón de ventas; su altura debe ser de 0,75m. Calcular las longitudes del frente y el fondo de la maqueta.

8) Los lados de un rectángulo miden 6cm y 8cm. Los siguientes datos corresponden a lados de rectángulos. ¿Alguno de ellos es semejante al original?
   a. 24cm y 34cm.
   b. 6cm y 7cm.
   c. 18cm y 24cm.
   d. 12cm y 4 cm.

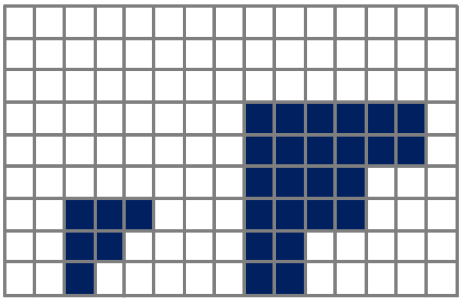
9) Los lados de un triángulo miden 3cm, 5cm y 6cm. Otro triángulo semejante tiene por lado correspondiente al mayor un lado que mide 24cm.
   a. ¿Cuál es la razón de semejanza?
   b. Hallar los restantes lados.

10) Los datos que se dan a continuación corresponden a parejas de triángulos semejantes. Calculen la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.
   a) 2cm, 5cm, 4cm
      8cm, $x$cm, $y$cm
   b) 3,5cm; 3,5cm; 3,5cm
      14cm, $x$cm, $y$cm
   c) $x$cm, 11cm, 12cm
      20cm, 22cm, $y$cm

11) De las siguientes parejas de triángulos de los que se conocen algunos lados y ángulo, determinen cuáles son semejantes y cuáles no.
   a) 10°, 20°, x°
      y°, 15°, 30°
   b) 2cm; 4cm; 6m
      1cm, 2cm, 3cm
   c) 2cm, 2cm, 1cm
      60°, 60°, x°

12) Hallar un triángulo semejante al triángulo de lados 5cm, 12cm y 13cm. Determinar si los triángulos son rectángulos y calculen sus áreas. ¿Qué relación existe entre las áreas de los dos triángulos?

13) Observar las dos figuras de la derecha, cuyos lados son proporcionales.
   a. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
   b. Calcular el área de las figuras anteriores considerando que cada cuadradito mide $1cm^2$. ¿Cuál es la razón entre las áreas de las dos figuras?



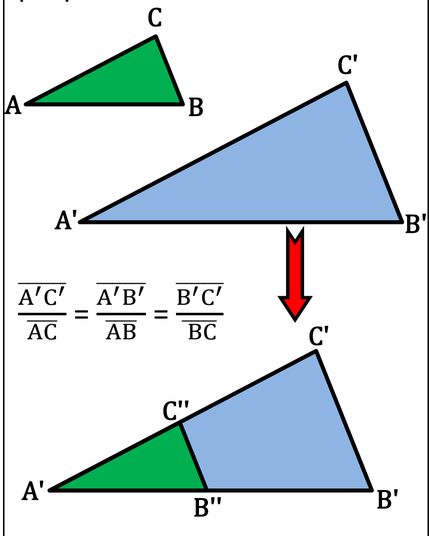
14) En función a lo realizado en los ejercicios 12 y 13.
   a. ¿Qué conclusión se puede extraer en relación al área de figuras semejantes?
   b. Buscar en libros o en internet material que explique qué sucede con el volumen de cuerpos geométricos semejantes.

Criterios de semejanza de triángulos

Para determinar si dos triángulos son semejantes, no es necesario probar la proporcionalidad de los lados correspondientes y la congruencia de los ángulos correspondientes; existen criterios que permiten analizar si son semejantes a partir de una cantidad mínima de información.

Criterio 1 (LLL)

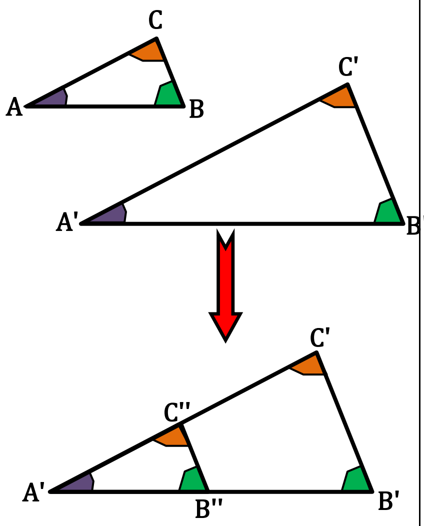
Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados respectivamente proporcionales.



$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

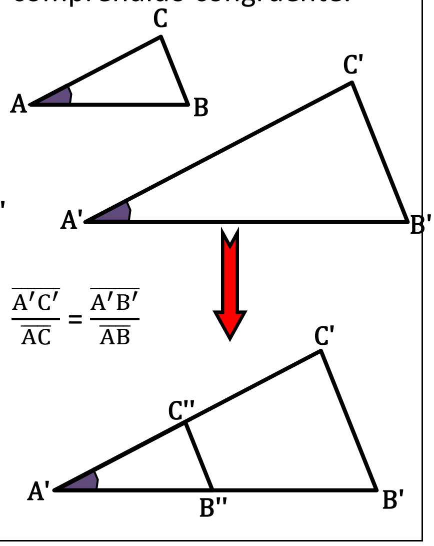
Criterio 2 (AA)

Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno son congruentes con dos ángulos del otro.



Criterio 3 (LAL)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido congruente.

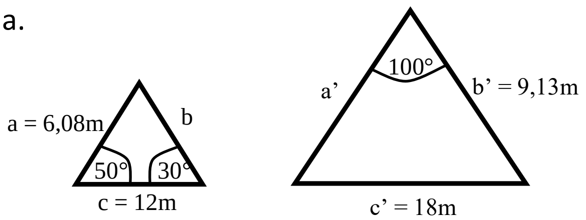


$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

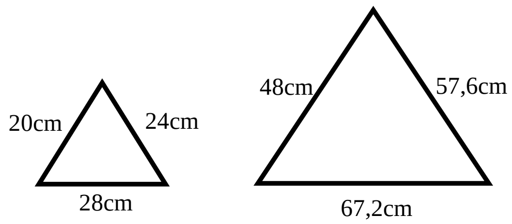
Actividades

1) Indicar si los siguientes pares de triángulos son semejantes justificando la respuesta. Si son semejantes, hallar el valor de los lados y ángulos que faltan, en caso de ser posible:

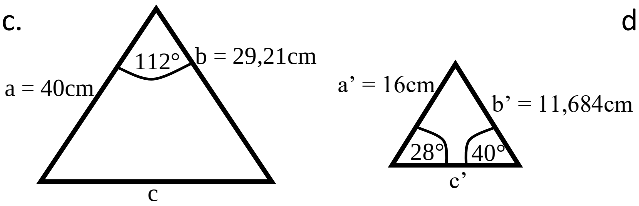
a.



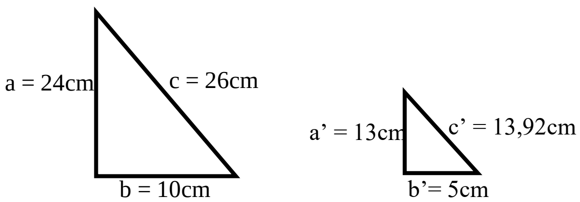
b.



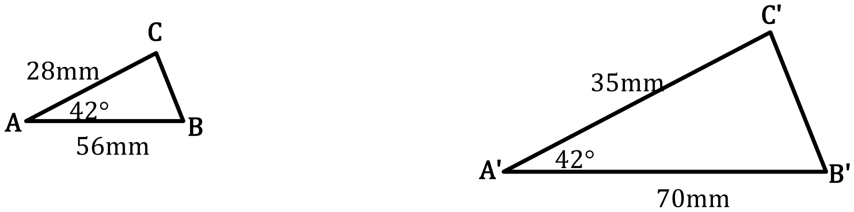
c.



d.



2) Los lados de un triángulo miden 9cm, 6cm y 12cm. Otro triángulo semejante tiene 9cm de perímetro. ¿Cuánto miden sus lados?
3) ¿Son semejantes los siguientes triángulos? Justificar la respuesta.



4) Un palo de 40cm produce una sombra de 25cm. En ese mismo instante un edificio cercano proyecta una sombra de 5,2m. ¿Cuál es la altura del edificio?

Unidad N° 4: Números Reales

Actividad inicial: **Piensa cuál es el conjunto de Números Naturales (N) y escribe debajo algunos de los números que forman parte de dicho conjunto.**

……………………………………………………………………………………………………….

Es sabido que si se suma 10 + 6 el resultado es 16.
¿Es posible restar un número al 10, de manera tal que el resultado también sea 16? Es decir, ¿existe algún número n que verifique que $10 - n = 16$? En ese caso, escríbelo debajo.

10 - …… = 16

Evidentemente, es imposible encontrar un número natural que cumpla esta condición. Por lo cual este problema no tiene solución dentro del conjunto de números naturales.

Pero piensa en el uso de los **Números Enteros (Z)**. ¿Cuál es el número entero que permite resolver correctamente el cálculo anterior?

Simbólicamente: **10 - …… = 16**

Ahora, escribe debajo algunos de los números que forman parte del conjunto de los Números Enteros (Z).

……………………………………………………………………………………………………….

¿Es posible encontrar un número que, multiplicado por 5, dé como resultado 13?

Resulta imposible determinar una solución dentro del conjunto de los números naturales o enteros. Pero piensa en el conjunto de los **Números Racionales (Q)**. ¿Cuál es el número racional que permite resolver correctamente el cálculo anterior?

Simbólicamente: **5 . …… = 13**

Ahora, escribe debajo algunos de los números que forman parte del conjunto de los Números Racionales (Q). ***(Para tener en cuenta:*** *Los números decimales finitos y decimales periódicos también son números racionales porque se pueden escribir en forma de fracción. Escribe algunos ejemplos de esos números).*

……………………………………………………………………………………………………….

¿Es posible encontrar un número que, elevado al cuadrado, dé como resultado 7?

Ningún número entero, o racional elevado al cuadrado da por resultado 7.

Este problema se traduce de la siguiente manera: hay que buscar un número x que verifique:

$$x^2 = 7$$

Hay dos números que verifican esa condición. Ellos son: **…….** y **……...**

Estos dos números pertenecen al conjunto de los **Números Irracionales (I)**.

Los números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas se llaman irracionales porque no son racionales, es decir, no pueden ser escritos como una fracción o como un cociente de números enteros.

Por ejemplo:

3,1234567891011121314151617181920……………….

Las cifras decimales son infinitas y no presentan periodicidad.

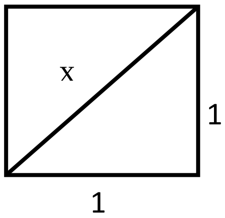
Algo importante para recordar: *Todas las raíces que no tienen una solución entera o racional, son números irracionales.*

Escribe debajo algunos de los números que forman parte del conjunto de los Números Irracionales (I).

…………………………………………………………………………………………………….

Algo de historia

Los pitagóricos (escuela antigua fundada por Pitágoras), cinco siglos antes de Cristo, ya conocían estos números. Sabían que si dibujaban un cuadrado de lado 1 y trazaban una de sus diagonales, la medida de ésta era un número no exacto.



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

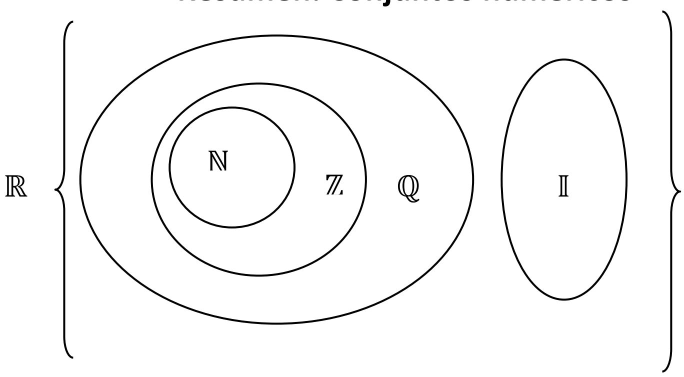
Con la calculadora encuentra el valor de $\sqrt{2}$ y escribe el número completo que aparece en la pantalla: **…………………………..**

Si elevamos este número al cuadrado, deberíamos obtener el valor 2. Eleven en número encontrado al cuadrado. ¿Qué valor obtiene? Escríbanlo acá: **………………………..**

¿Obtuvieron el valor 2?

Si no obtuvieron el valor 2, ¿por qué creen que obtuvieron otro número?

Resumen: Conjuntos numéricos



Siendo:

ℕ = Números naturales; ℤ = Números enteros; ℚ = Números racionales; 𝕀 = Números irracionales y ℝ = Números reales.

Números Reales: Si se consideran conjuntamente los números racionales y los irracionales, se obtiene el conjunto de números reales, que se representa con la letra R. Esto significa que cada número real tiene una expresión decimal que puede ser finita, periódica o infinita.

Actividades

1) Indicar cuáles de las siguientes expresiones decimales son números irracionales y cuáles se pueden escribir como una fracción y en dicho caso escribir la fracción que corresponda.

a. 1,391221112222111112222221111111……

b.0,62346234623462346234623462346234………

c.5,210432104321043210432104321043…………..

d.3,1442114221423142414251426142 7…….

e.1,1234567891011121314151617181920….

f.5,159159159159159159159159159………

g.10,753753753753753753753753753………

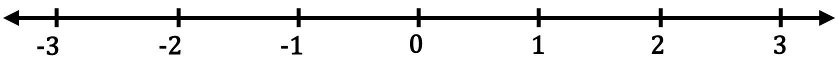
Los números reales y la recta numérica

En una recta numérica se pueden representar los números naturales, los enteros, los racionales, es factible ubicar también los irracionales. El problema que se plantea es cómo hacer para representar algunos de ellos.

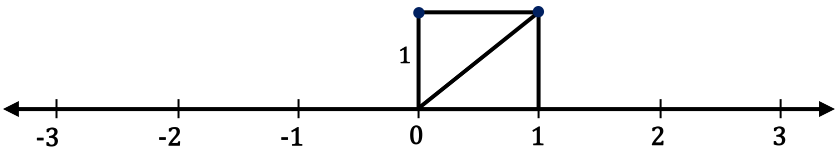
Problema: Ubicar el número $\sqrt{2}$ en una recta numérica.

Para ubicar el número $\sqrt{2}$ en una recta numérica se puede proceder de la siguiente manera:

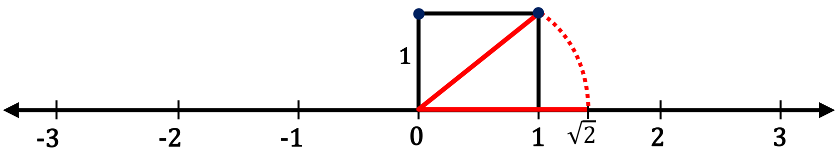
a. Se dibuja una recta y en ella se señalan algunos números, además del 0 y el 1.



b. Sobre el segmento que va de 0 a 1 se dibuja un cuadrado de lado 1. Se marza la diagonal de dicho cuadrado.



c. Por el Teorema de Pitágoras, la diagonal del cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$. Esta medida puede ser transportada con el compás sobre la recta numérica:



Esta construcción muestra que hay un punto en la recta numérica que corresponde a $\sqrt{2}$. Es posible asegurar que el valor marcado es $\sqrt{2}$, ya que se dibujó una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ centrada en 0. Se encontró entonces un punto de la recta que no se corresponde con ningún número racional. Es decir, la recta no estaba totalmente ocupada por números racionales. Al considerar los números irracionales, se completa la recta.

Algunos puntos de la recta son ocupados por los naturales, otros por los enteros, otros por los racionales y, finalmente, con los irracionales se termina de llenar la recta numérica.

Actividades

2) Representar en la recta numérica los siguientes números irracionales:

a) $\sqrt{13}$
b) $\sqrt{29}$
c) $\sqrt{18}$
d) $\sqrt{8}$
e) $\sqrt{10}$
f) $\sqrt{3}$
g) $\sqrt{26}$
h) $\sqrt{17}$
i) $\sqrt{7}$
j) $\sqrt{6}$
k) $\sqrt{50}$
l) $\sqrt{40}$

Propiedades de la radicación

1- **Ley distributiva de la radicación respecto de la multiplicación:**
Para todo "a" y todo "b" pertenecientes a $\mathbb{Z}$: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$
Ejemplo: $\sqrt[4]{81\,.\,16} = \sqrt[4]{81} \,.\, \sqrt[4]{16} = 3\,.\,2 = 6$

2- **Ley distributiva de la radicación respecto de la división:**
Para todo "a" y todo "b" pertenecientes a $\mathbb{Z}$: $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} \,/\, \sqrt[n]{b}$
Ejemplo: $\sqrt[3]{64\,/\,8} = \sqrt[3]{64} \,/\, \sqrt[3]{8} = 4\,/\,2 = 2$

3- **Raíz de raíz:**
Para todo "a", todo "m" y todo "n" pertenecientes a $\mathbb{Z}$: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
Ejemplo: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2.3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$.

4- **Simplificación de índice y exponente:**
Si el exponente del radicando positivo es igual, divisor o múltiplo del índice, se puede simplificar exponente con índice:
Ejemplos:

a) $\sqrt[7]{2^7} = 2$
b) $\sqrt[9]{27^3} = \sqrt[3]{27^1} = 3$
c) $\sqrt[5]{3^{25}} = \sqrt[1]{3^5} = 3^5$.

Atención: la simplificación de índice y exponente no puede efectuarse cuando el radicando es negativo y el índice es par.
Ejemplo: $\sqrt[4]{(-3)^2}$ (No se pueden simplificar el índice y el exponente).

5- **Exponentes Racionales:**
La base de la potencia es el radicando, el denominador del exponente racional es el índice de la raíz y el numerador del exponente racional es el exponente del radicando:
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
Ejemplo: $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$

6- **Potencia de una raíz:**
$\left(\sqrt[n]{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{m}} = \sqrt[n]{\mathbf{a^m}}$
Ejemplo: $\left(\sqrt[3]{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{2}} = \sqrt[3]{\mathbf{9^2}}$

Radicales semejantes

Dos radicales son semejantes cuando tienen el mismo índice y radicando.

Los radicales $\sqrt{3}$ y $5\sqrt{3}$ son semejantes. Tienen el mismo índice, 2, y el mismo radicando, 3.

Los radicales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ son semejantes. Se comprueba sacando factores del radical. Para esto se utiliza la propiedad de la radicación respecto de la multiplicación y la simplificación de índice y exponente:

$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2} = \sqrt{2^2}\ .\sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$

Operaciones con radicales

Suma y resta de radicales

Al sumar o al restar términos que contengan radicales semejantes, podemos obtener una expresión de un solo término:

Ejemplo 1: $8\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$

Ejemplo 2: $\sqrt{32} + \sqrt{2} - \sqrt{8}$

En este caso, los radicales no son semejante, pero haciendo una adecuada descomposición en factores primos de los radicandos y utilizando las propiedades adecuadas, podemos llegar a obtener radicales semejantes:

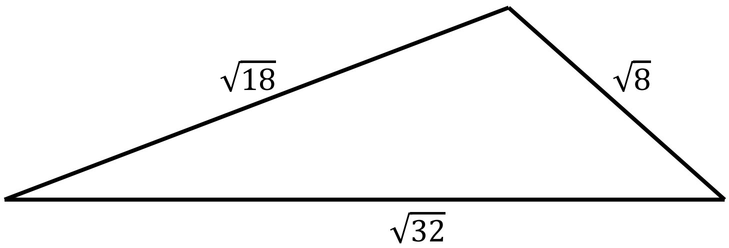
32	2	8	2
16	2	4	2
8	2	2	2
4	2	1	
2	2		
1			

O sea que: $32 = 2^5$ y $8 = 2^3$

Por lo tanto: $\sqrt{32} + \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2^5} + \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2^2.2} + \sqrt{2} - \sqrt{2^2.2} =$
$= \sqrt{2^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2^2}.\sqrt{2} = 2.2.\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2.\sqrt{2} = 4.\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2.\sqrt{2} = 3.\sqrt{2}$

Actividades

3) Calcular la medida en centímetros del perímetro **P** del triángulo dibujado:



4) Resolver las siguientes operaciones:

a. $2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

b. $3\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$

c. $5\sqrt{3} + \sqrt{27} + 3\sqrt{2187}$

d. $-2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 5\sqrt{32}$

e. $3\sqrt{40} + 7\sqrt{250} - 6\sqrt{90} - 2\sqrt{810}$

f. $\sqrt{2} - \sqrt{200} + \sqrt{72}$

g. $3\sqrt{20} - 2\sqrt{12} - 2\sqrt{45} + \frac{4}{5}\sqrt{75}$

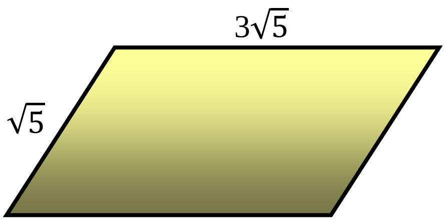
h. $\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{16}$

i. $2\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{81} + 5\sqrt[3]{3}$

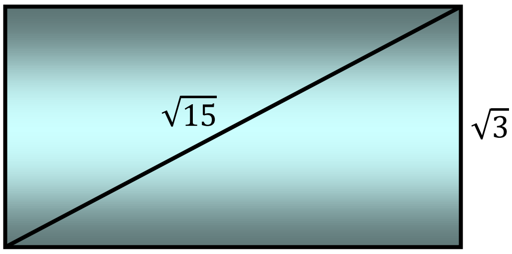
j. $2\sqrt[8]{9} - \sqrt[4]{243} + 5\sqrt[4]{3}$

5) Hallar el perímetro de cada una de las siguientes figuras:

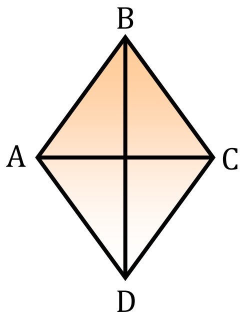
a)



b)

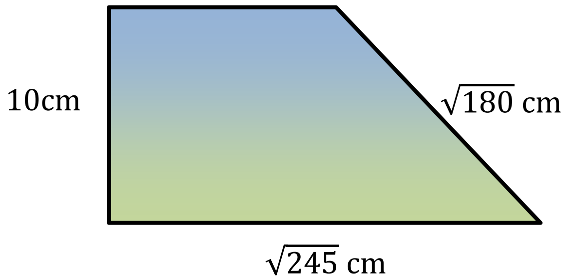


c)



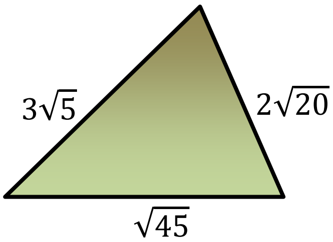
$\overline{AC}$ = 4cm $\overline{BD}$ = 6cm

d)

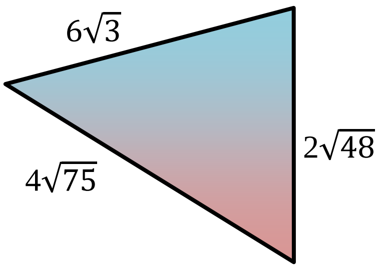


6) Calcular la medida en centímetros del perímetro **P** de cada uno de los siguientes triángulos:

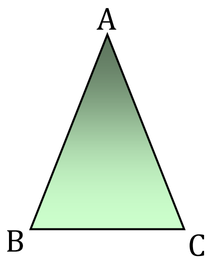
a)



b)



7) En cada recuadro hay una figura; calculen su perímetro con los datos que se indican en cada caso:



Triángulo isósceles

Rectángulo

a) $\overline{AB} = \overline{AC} = 3\sqrt{5}$ cm y $\overline{CB} = 2\sqrt{5}$ cm

b) $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ cm; h = $\sqrt{24}$ cm

c) $\overline{RQ} = \sqrt{50}$cm, $\overline{PR} = \sqrt{5}$cm

d) $\overline{RP} = \sqrt{3}$cm, $\overline{PQ} = 4\overline{RP}$

Multiplicación y división de radicales

- **Radicales del mismo índice:** para multiplicar o dividir radicales del mismo índice, seguimos el procedimiento inverso a la aplicación de la propiedad distributiva, es decir:

$$\sqrt{\mathbf{a}}\ .\ \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a}\ .\ \mathbf{b}} \qquad\qquad \frac{\sqrt[n]{\mathbf{a}}}{\sqrt[n]{\mathbf{b}}} = \sqrt[n]{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$$

Ejemplos: $\sqrt{2^3}\ .\ \sqrt{5} = \sqrt{2^3\ .5} = \sqrt{8\ .5} = \sqrt{40}$ $\qquad \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$

- **Radicales de índices distintos:** debemos hallar radicales equivalentes de modo tal que todos tengan el mismo índice:

Ejemplo 1: Para multiplicar: $\sqrt[6]{2}\ .\ \sqrt[4]{3}$, hacemos así:

- Hallamos el *múltiplo común menor* entre los índices: m.c.m (6,4) = 12
- Hallamos radicales equivalentes a los dados, que tengan índice 12:

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt[2.6]{2^2} = \sqrt[12]{2^2}$$
$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[3.4]{3^3} = \sqrt[12]{3^3}$$

- Multiplicamos los radicales que obtuvimos:

$$\sqrt[12]{2^2}\ .\ \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^2.3^3} = \sqrt[12]{4\ .27} = \sqrt[12]{108}$$

Ejemplo 2: Para realizar la siguiente división, aplicamos un procedimiento similar:

$$\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{3^2}} = \sqrt[4]{\frac{6}{3^2}} = \sqrt[4]{\frac{6}{9}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

Actividades

8) Completar los siguientes ejemplos. Cuando sea posible, operar y extraer factores fuera de los radicales:

a) $\sqrt[3]{9}\ .\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9.3} = \sqrt[3]{\qquad} =$ ....

b) $\sqrt[5]{2^2.5^3}\ .\ \sqrt[5]{2.5^2} = \sqrt[5]{\qquad\qquad} = \sqrt[5]{2^{\cdots\cdots}.5^{\cdots\cdots}} =$

c) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\quad}{\quad}} = \sqrt{\quad}$

d) $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{\quad}{\quad}} = \sqrt[3]{\quad} = \sqrt[3]{2^{\cdots\cdots}} = \sqrt[3]{2^3}.\ \sqrt[3]{2} = \ldots\ldots.. \ .\ \sqrt[3]{2}$

9) Resolver y, cuando sea posible, simplificar:

a. $5\sqrt{2}\ .\ 4\sqrt{8}$

b. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

c. $3\sqrt{3}\ .\ 5\sqrt{12}$

d. $\left(\sqrt{7} - \sqrt{8}\right).\left(\sqrt{7} + \sqrt{8}\right)$

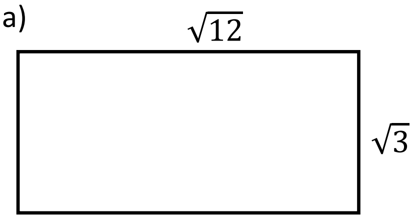
e. $\sqrt[3]{4}\ .\ \sqrt[6]{2}$

f. $\sqrt{2}\ .\ \sqrt[3]{5}$

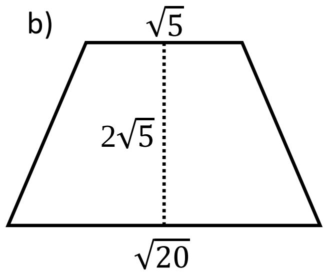
g. $\sqrt[6]{40}\ .\ \sqrt[3]{2}$

13) Hallar el valor exacto del área de las siguientes figuras. Todas las medidas están dadas en centímetros.

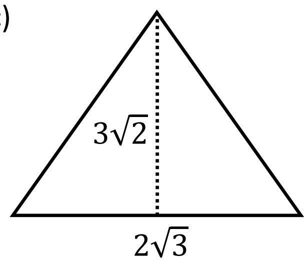
a)



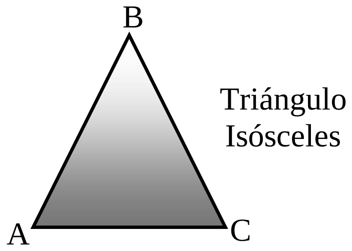
b)



c)



d)



$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ y $\overline{AC} = 2\sqrt{3}$

e)

$\overline{PR} = 2\sqrt{11}$ $\overline{RS} = 2\sqrt{44}$

14) Resolver los siguientes productos y divisiones con raíces:

a. $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) . (\sqrt{6} - 1)$

b. $(\sqrt{5} + \sqrt{2}) . (\sqrt{10})$

c. $(\sqrt{3} + \sqrt{6}) . (\sqrt{18})$

d. $(\sqrt{12} - \sqrt{6}) : (\sqrt{3})$

e. $(\sqrt{8} - \sqrt{6}) : (\sqrt{2})$

f. $(\sqrt{48} + \sqrt{6} - \sqrt{27}) : (\sqrt{3})$

g. $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) . (\sqrt{2} - \sqrt{3})$

h. $(\sqrt{2} + 5\sqrt{5}) . (-1\sqrt{2} + 5\sqrt{5})$

i. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) . (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$

j. $(\sqrt{2} + 1)^2$

k. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$

l. $(\sqrt{10} . \sqrt[3]{3}) : \sqrt[6]{1000}$

15) Resolver las siguientes operaciones combinadas con raíces:

a. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

b. $(\sqrt{8} + \sqrt{6}) : (\sqrt{2}) - (\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 1)$

c. $(\sqrt{12} - \sqrt{3}) . (\sqrt{3} + 1) + \left(\sqrt{8}.\sqrt{2} - \frac{1}{5}.\sqrt{75}\right)$

d. $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) . \sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2}.\sqrt{24} + \sqrt{2} - \frac{1}{3}.\sqrt{18}$

e. $(\sqrt{5} - 1) . \sqrt{2} + \frac{3}{2}.\sqrt{40} + \sqrt{8} - \frac{1}{3}.\sqrt{72} - \frac{2}{5}.\sqrt{1000}$

f. $\left[(\sqrt{3} - 2)^2 . \sqrt{3} + \sqrt{7}.\sqrt{28} - \sqrt{5} . \sqrt{20}\right] : (\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{108})$

Racionalización de denominadores

En ocasiones, cuando aplicamos propiedades algebraicas y trabajamos con fracciones, resulta conveniente que éstas no tengan radicales en el denominador. En caso de que los contengan, a veces podemos **transformarlas en otras equivalentes, que tengan denominador racional.** Esta transformación se denomina ***racionalización de denominadores***.

1er caso: El denominador contiene un solo término con un radical de índice 2.

Ejemplo: Racionalicemos el denominador de la expresión: $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

- Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical que aparece en el denominador:

$$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{2^2}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

- Se obtiene una expresión en donde en el denominador ya no aparecen raíces.

2do caso: El denominador contiene un solo término con un radical de índice mayor que 2.

Ejemplo: Racionalicemos el denominador de la expresión $\dfrac{1}{\sqrt[5]{6^2}}$

- Como el radical tiene índice mayor que 2, buscamos un factor conveniente para eliminarlo del denominador. Una regla práctica para eliminar un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ (con n > m) consiste en multiplicar el numerador y el denominador por otro radical de la forma $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{6^2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{6^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^3}}=\frac{\sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^2}.\sqrt[5]{6^3}}=\frac{\sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^5}}=\frac{\sqrt[5]{6^3}}{6}$$

3er caso: el denominador es una suma o una resta de donde aparecen uno o dos radicales de índice 2.

Recordemos que **(a + b). (a - b) = a² – b²**. A las expresiones **a + b** y **a – b** las llamamos **conjugadas**.

Ejemplo 1: Racionalicemos el denominador de la expresión $\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$

- Multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que aparece en el denominador.

$$\frac{3}{2+\sqrt{5}}=\frac{3}{(2+\sqrt{5})}\cdot\frac{(2-\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})}=\frac{3.(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5}).(2-\sqrt{5})}=\frac{6-3\sqrt{5}}{4-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{5^2}}=\frac{6-3\sqrt{5}}{4-5}=$$

$$=\frac{6-3\sqrt{5}}{-1}=\frac{6}{-1}-\frac{3\sqrt{5}}{-1}=-6+3\sqrt{5}$$

Ejemplo 2: Racionalicemos el denominador de la expresión $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}.(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3}).(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{\sqrt{7^2}+\sqrt{21}-\sqrt{21}-\sqrt{3^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{7-3}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{4}$$

Actividades

17) Racionalizar las siguientes expresiones:

a) $\frac{6}{\sqrt{5}}$ f) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ k) $\frac{6\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$ p) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{7}{\sqrt{3}}$ g) $\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ l) $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$ q) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

c) $\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ h) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ m) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}}$ r) $\frac{\sqrt{3}}{9+\sqrt{2}}$

d) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ i) $\frac{4}{\sqrt[5]{2^4}}$ n) $\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{2^3}}$ s) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

e) $\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$ j) $\frac{3}{\sqrt[3]{6^2}}$ o) $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ t) $\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$

Potencias de exponente racional

Como vimos en las propiedades de las raíces: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Veamos algunos ejemplos:

a) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

b) $7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{49}$

c) $50^{\frac{1}{2}} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2.2} = \sqrt{5^2}\,.\,\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $4^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

De manera similar, también se pueden resolver operaciones como la siguiente: $\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[4]{2}$

Como los radicales tienen el mismo radicando, podemos expresarlos como potencias y aplicar las propiedades de la potenciación:

$$\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{3}}\,.\,2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4+3}{12}} = 2^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{2^7}$$

Actividades

20) Expresar las siguientes potencias como radicales y, cuando sea posible, resolverlas:

a) $(-32)^{\frac{1}{5}}$ b) $25^{-\frac{1}{2}}$ c) $27^{\frac{1}{3}}$ d) $\left(\frac{2}{49}\right)^{\frac{3}{2}}$ e) $\left(\frac{5}{36}\right)^{\frac{3}{2}}$ f) $16^{-\frac{1}{3}}$ g) $243^{-\frac{1}{5}}$ h) $8^{\frac{2}{3}}$

21) Transformar los radicales en potencias, resolver y luego expresar el resultado como un radical.

a) $\sqrt{5^7}\,.\,\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[3]{12} : \sqrt[4]{12}$ c) $\left(16\sqrt[5]{6^3}\right) : \left(8\sqrt[10]{6}\right)$ d) $\sqrt{7^3}\,.\,\sqrt[6]{7}$

e) $\sqrt[5]{2^3} : 128$ f) $25^2\,.\,\sqrt[3]{5^7}$ g) $\sqrt[3]{9} : \sqrt[9]{81}$ h) $\left(\sqrt[5]{7^3}\right)^3\,.\,\left(\sqrt[3]{49}\right)^5$

Unidad N° 5: Sucesiones

Una *sucesión numérica* es una secuencia ordenada de números reales, cada uno de esos números se denomina término.

Término general: **Las sucesiones se definen como una función cuyo dominio son los números naturales y a dicha función se la denomina *término general* de la sucesión. El término general se escribe como: a_n.**

El primer término se denomina a_1, el segundo a_2, el tercero a_3 y así sucesivamente hasta el término enésimo que es a_n.

Ejemplo: La sucesión de números naturales: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; ……. n

En donde: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$, etc.

Esta sucesión está definida por el término general: $\mathbf{a_n = n}$

Progresiones Aritméticas

Una *progresión aritmética* es una sucesión en la cual cada término se obtiene sumando al término anterior un número fijo llamado *razón*.

Término general de una progresión aritmética: **Si en una progresión aritmética *d* es la razón y a_1 es el primer término, el *término general* será:**

$$\boxed{a_n = a_1 + d.(n - 1)}$$

Ejemplo 1: La sucesión: 5; 8; 11; 14; 17 …..

En este caso: $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; $a_3 = 11$; etc.

La razón es: $d = 3$

El término general es: $a_n = 5 + 3.(n – 1)$. En función de este término general, se puede obtener cualquier término de la progresión. Por ejemplo, si se quiere averiguar el término cincuenta de la progresión se calcula: $a_{50} = 5 + 3.(50 – 1) \Rightarrow a_{50} = 5 + 3.49 \Rightarrow a_{50} = 5 + 147 \Rightarrow \mathbf{a_{50} = 152}$

Actividades

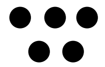
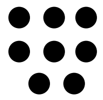
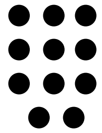
1) Determinar si las siguientes sucesiones finitas son o no progresiones aritméticas y explicar por qué:
   a. 2; 5; 8; 11; 14; 17
   b. 6,1 ; 8,2 ; 10,3 ; 12,5 ; 14,7 ; 17
   c. $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}$
   d. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}$
   e. 3,5 ; 5,8 ; 8,1 ; 10,4 ; 12,7
   f. 6; 10; 14; 18; 22; 27

2) Calcular la razón y el término general de cada una de las siguientes progresiones aritméticas:
   a. 9; 12; 15; 18; 21…
   b. 7; 12; 17; 22; 27…
   c. 4; 11; 18; 25; 32…
   d. $\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{9}{2}; \frac{13}{2}$

3) Juan tiene guardados 23 discos compactos. Decide que va a comprar 3 por mes.
   a. ¿Al cabo de cuántos meses logrará tener 50 discos compactos? ¿Y 80?
   b. ¿Será cierto que nunca podrá tener justo 100 discos compactos?

4) El término general de una progresión aritmética viene dado por la siguiente fórmula: $a_n = 135 + 25.(n – 1)$
   a. ¿Es cierto que el término $a_{20} = 610$?
   b. ¿Para qué valor de *n* la expresión vale 310?
   c. ¿Será cierto que los términos de esta sucesión siempre terminan en 0 o en 5? ¿Por qué?

5)

1	2	3
		
Cada columna se completa siguiendo la regla de agregar 3 círculos más a la columna anterior		

a. ¿Cuántos círculos habrá en la décima columna?
b. Calcular cuántos círculos habrá en la columna *n*. Esto significa hallar el término general.
c. Calcular cuántos círculos habrá en la columna 50.
d. Si en una columna hay 92 círculos. ¿Qué número es esa columna?

6) Héctor se está entrenando para una competencia de maratón. Para conseguir un mejor rendimiento comienza corriendo 1500 metros y todos los días agrega 1000 metros más.
   a. ¿Es posible saber cuántos metros tendrá que recorrer al séptimo día? ¿Y al décimo día?
   b. ¿Qué día llegará a recorrer 13500 metros?

7) Beatriz decide ahorrar por mes $350 de su sueldo. Si ya tenía guardados $1200 y no los utiliza.
   a. ¿A cuánto ascenderán sus ahorros al término de seis meses? ¿Y al término de 15 meses? ¿Y si pasaron 40 meses?
   b. ¿Es posible hallar una fórmula que permita anticipar cuánto dinero tendrá ahorrado al término de una cantidad cualquiera de meses?

Suma de términos de una progresión aritmética

Se denomina con S_n a la suma de *n* términos consecutivos de una progresión aritmética. Esta suma está dada por la siguiente fórmula:

$$\boxed{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).n}$$

Ejemplo 1: Hallar la suma de los ocho primeros términos de la sucesión:
2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18 ….
Por lo tanto, debemos calcular S_8. Para lo cual sabemos que $a_1 = 2$; $n = 8$ y $a_8 = 16$. Entonces:

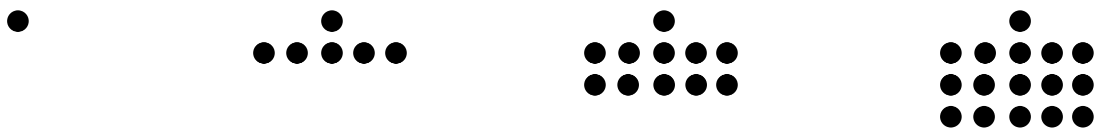
$S_8 = \frac{2+16}{2} \cdot 8 \Rightarrow S_8 = \frac{18}{2} \cdot 8 \Rightarrow S_8 = 9.8 \Rightarrow \mathbf{S_8 = 72}$

Ejemplo 2: ¿Cuál es el resultado de sumar los cien primeros múltiplos de 4?
Esta progresión está dada por: 4; 8; 12; 16; ……
En donde, la razón $d = 4$; $n = 100$, pero nos falta a_n. Para calcularlo utilizamos la fórmula del término general de una progresión aritmética: $a_n = a_1 + d.(n - 1)$:
$a_{100} = 4 + 4.(100 - 1) \Rightarrow a_{100} = 4 + 4.99 \Rightarrow a_{100} = 4 + 396 \Rightarrow a_{100} = 400$.

Ahora: $S_{100} = \frac{4+400}{2} \cdot 100 \Rightarrow S_{100} = \frac{404}{2} \cdot 100 \Rightarrow S_{100} = 202.100 \Rightarrow \mathbf{S_{100} = 20200.}$

Actividades

8) Se disponen bolitas en fila armando figuras de la siguiente manera:



¿Qué cantidad de bolitas que se necesitan en total hasta llegar a completar una figura con 28 filas?

9) ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 5 comprendidos entre 1243 y 4728?

10) Se toma una cantidad de números impares consecutivos empezando por 1. Sabiendo que el último número impar tomado es 209 y que la suma de todos ellos es 11025. ¿Cuántos números impares se tomaron?

Actividades generales

11) Una escalera tiene sus escalones cada 20cm. Si el primer escalón está a 40cm del suelo. ¿a qué altura se encuentra el quinto escalón?

12) Se sabe que el último término de una progresión aritmética es 199, que el número de términos es 100, y la suma de sus términos es 10000. ¿Es posible calcular el primer término? ¿Y la razón?

13) De una progresión aritmética se sabe que tiene razón 4, el primer término vale 7 y tiene sólo 12 términos. Calcular el último término de la progresión y la suma de sus términos.

14) Calcular la suma de todos los números pares entre 57 y 891.

15) Un cuidador de parques tiene que arrojar cierto fertilizante a los 30 árboles del predio que se encuentran sobre el camino principal. El primer árbol se encuentra a 10 metros del lugar donde está el fertilizante y los árboles distan entre sí 6 metros. Al finalizar el camino, ¿cuántos metros habrá recorrido el cuidador?

16) Calcular la suma de todos los números múltiplos de 6 entre 234 y 648.

17) Para realizar un pozo, una empresa constructora paga $76 por el primer metro y por cada metro extra paga $15 más que por el metro anterior. Si en total pagó a la excavadora $4366. ¿Cuál fue la profundidad del pozo?

18) Calcular la suma de los primeros cien números naturales que son múltiplos de 7.

19) Calcular la suma de todos los números naturales de tres cifras que son múltiplos de 4.

20) Un reloj da campanadas solamente cuando son las horas en punto y da tantas campanadas como la hora que es. ¿Cuántas campanadas da diariamente el reloj?

21) Encontrar la suma de todos los múltiplos de 4 que se encuentran entre 118 y 1420.

22) Calcular la suma de los primeros 50 números naturales que son múltiplos de 5.

23) Se armó una pila triangular sacando 2 bolas a la fila anterior. Si la base inferior de la pila contiene 35 bolas y la parte superior contiene 11 bolas. ¿Cuál es la cantidad total de bolas que se utilizaron para armar la pila?

24) ¿Cuál es la cantidad de términos de una progresión aritmética donde el primer término es 4, la razón es 3 y el último término es 40? ¿Cuál es su suma?

25) ¿Los números pares forman una progresión aritmética? ¿Y los números naturales? ¿Cuál será en cada caso el término general?

26) ¿Cuál es el resultado de sumar los primeros cien múltiplos de 3?

27) ¿Es cierto que la suma de los 132 primeros números naturales es 8778?

28) ¿Es posible que la suma de los 200 primeros múltiplos de 4 sea 80399?

29) Se sabe que el primer término de una progresión aritmética es 3, el último término es 98 y la suma de sus términos es 1010. ¿Cuántos términos tiene dicha sucesión?

30) Calcular la suma de las siguientes progresiones aritméticas:
    a. $a_1 = 25$; $n = 15$; $d = 2$.
    b. $a_1 = -18$; $n = 22$; $d = 0{,}5$.
    c. $a_1 = 925$; $n = 12$; $d = -3$.

31) La suma de los primeros 47 términos de la progresión aritmética $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}.(n-1)$ es igual a:
    a. $S_{47} = 822{,}5$
    b. $S_{47} = \frac{139}{4}$
    c. $S_{47} = 1645$
    d. $S_{47} = 1633{,}25$

32) Juan tenía $10 y ahorró durante 30 días siempre la misma cantidad de dinero, llegando a juntar $250. ¿Cuál de los siguientes números representa el ahorro de cada día?
    a. $8,30   c. $8
    b. $8,60   d. Ninguna.

Progresiones Geométricas

Una *Progresión geométrica* está constituida por una secuencia de elementos en la que cada uno de ellos se obtiene multiplicando el anterior por una constante denominada *razón* de la progresión.

***<u>Término general de una progresión geométrica conociendo el primer término</u>:* Si en una progresión geométrica *d* es la razón y a_1 es el primer término, el *término general* será:**

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot d^{(n-1)}}$$

<u>Ejemplo</u>: La sucesión geométrica: 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256 …..

En este caso: $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; etc.

La razón es: d = 2

El término general es: $a_n = 2.2^{(n-1)}$. En función de este término general, se puede obtener cualquier término de la progresión geométrica. Por ejemplo, si se quiere averiguar el décimo término se calcula: $a_{10} = 2.2^{(10-1)} \Rightarrow a_{10} = 2.2^9 \Rightarrow a_{10} = 2.512 \Rightarrow \mathbf{a_{10} = 1024}$

***<u>Término general de una progresión geométrica conociendo cualquier término</u>:* Si en una progresión geométrica *d* es la razón y a_k es el valor del término que ocupa la posición *k*; el *término general* será:**

$$\boxed{a_n = a_k \cdot d^{(n-k)}}$$

<u>Ejemplo</u>: Hallar los primeros tres términos de una progresión geométrica en donde $a_4 = 24$ y r=2.

Como $a_4 = 24$, entonces k = 4, o sea que:

- $a_1 = 24.2^{(1-4)} \Rightarrow a_1 = 24.2^{(-3)} \Rightarrow a_1 = 24.\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow a_1 = 24.\frac{1}{8} \Rightarrow a_1 = \frac{24}{8} \Rightarrow \mathbf{a_1 = 3}$
- $a_2 = 24.2^{(2-4)} \Rightarrow a_2 = 24.2^{(-2)} \Rightarrow a_2 = 24.\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a_2 = 24.\frac{1}{4} \Rightarrow a_2 = \frac{24}{4} \Rightarrow \mathbf{a_2 = 6}$
- $a_3 = 24.2^{(3-4)} \Rightarrow a_3 = 24.2^{(-1)} \Rightarrow a_3 = 24.\left(\frac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow a_3 = 24.\frac{1}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{24}{2} \Rightarrow \mathbf{a_3 = 12}$

***<u>Propiedad</u>:* El cociente entre un término de la sucesión geométrica y su término anterior es la *razón*.**

Progresiones Geométricas de razón negativa

Cuando una *progresión geométrica* tiene razón negativa, obtenemos una sucesión oscilante. Esto quiere decir que los términos contiguos son de distinto signo.

<u>Ejemplo 1</u>: $a_n = 1 . (-2)^{(n-1)} \Rightarrow$ 1; -2; 4; -8; 16; -32….

<u>Ejemplo 2</u>: $a_n = 3 . (-1)^{(n-1)} \Rightarrow$ 3; -3; 3; -3; 3; -3….

Actividades

1) Dados el primer término y la razón de una progresión geométrica escribir los cinco primeros términos de la sucesión:
   a. $a_1 = 2$ y d = 3
   b. $a_1 = 3$ y d = 2
   c. $a_1 = \frac{1}{2}$ y d = -2
   d. $a_1 = 16$ y d = $\frac{1}{2}$
   e. $a_1 = 5$ y d = 3
   f. $a_1 = 4$ y d = -1
2) En una progresión geométrica el primer término es 7 y la razón es 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?
3) Hallar los siguientes dos términos de las siguientes sucesiones:
   a. 3; 6; 12; 24; 48; ….
   b. 5; -15; 45; -135; ….
   c. 1; 4; 16; 64;…
4) Si en una progresión geométrica $a_{25} = 4$ y d = -1, hallar los cuatro primeros términos de la progresión.

Suma de términos de una progresión geométrica

Se denomina con S_n a la suma de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica. Esta suma está dada por la siguiente fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{a_n . d - a_1}{d - 1}}$$

Ejemplo 1: Calcular la suma de los cinco primeros términos de la progresión geométrica: 3; 6; 12; 24; 48 ….

$$S_5 = \frac{48.2-3}{2-1} = \frac{96-3}{1} = \frac{93}{1} = 93$$

Actividades

1) En una progresión geométrica $a_1 = 4$ y $d = 3$, calcular el séptimo término y la suma de los primeros siete términos.

2) En una progresión geométrica $a_1 = 3$ y $d = 2$, un término vale 96. ¿Qué lugar ocupa?

3) En una progresión geométrica cuyo primer término es 5, el séptimo término vale 320. ¿Cuál es la razón de la progresión?

4) En una progresión geométrica de razón 3, el quinto término es 405. ¿Cuál es el primer término de la progresión?

5) Calcular la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica sabiendo que el primer término es 5 y su razón es -2.

6) Calcular la suma de los nueve primeros términos de la progresión geométrica sabiendo que el primer término vale 3 y su razón es 2.

7) El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Hallar los cinco primeros términos de dicha progresión.

8) Sea la progresión geométrica: 0,4; 1,2; 3,6; 10,8; 32,4; 97,2; 291,6;… Encontrar el término 11.

9) En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Hallar el primer término.

10) Dadas las siguientes progresiones, clasificar si son aritméticas o geométricas:

    a. 2; 4; 6; 8; 10

    b. $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{6}{3}; \frac{8}{3}; \frac{10}{3}$

    c. 1; 2; 4; 8; 16

    d. $\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; \frac{20}{3}; \frac{40}{3}; \frac{80}{3}$

11) Dos ciclistas se preparan para una competencia: Pablo comienza con 1000 metros, y todos los días agrega 1000 metros más, en tanto que Emilio empieza con 200 metros y cada día duplica lo hecho el día anterior. ¿Cuántos metros recorre cada uno el décimo día?

Unidad N° 8: Ecuaciones e Inecuaciones

Ecuaciones lineales con una incógnita

Las ecuaciones son un tipo de igualdad entre expresiones algebraicas. Las igualdades pueden ser *identidades*, que se verifican para cualquier valor de sus variables, o *ecuaciones*, que se verifican sólo para algún o algunos valores de sus variables.

Con esto estamos diciendo que: en algunos casos se van a obtener infinitas soluciones, en otros casos una sola solución o más de una solución y, en otros casos, ninguna solución.

***Solución de una ecuación:* Una solución de una ecuación algebraica con una incógnita x es una número x_0 tal que al reemplazar x por x_0 en la ecuación, ésta se transforme en una identidad numérica.**

Resolver una ecuación significa determinar si tiene solución y en tal caso hallar todas las soluciones.

Ejemplos

a) **$3x - 9 = 0$** tiene solución $x_0 = 3$ ya que si reemplazamos en la ecuación la variable x por $x_0 = 3$, se obtiene: $3.3 - 9 = 0 \Rightarrow 9 - 9 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (que es una identidad numérica).

b) $2x + 1 = 2x$ no tiene solución.

c) $2.(x - 1) + 3 = 5$ tiene solución $x_0 = 2$ ya que si reemplazamos en la ecuación la variable x por $x_0 = 2$, se obtiene: $2.(2 - 1) + 3 = 5 \Rightarrow 2.1 + 3 = 5 \Rightarrow 2 + 3 = 5 \Rightarrow 5 = 5$ (que es una identidad numérica).

***Ecuaciones equivalentes:* Dos ecuaciones son equivalentes si admiten las mismas soluciones.**

¿Cómo se obtienen dos ecuaciones equivalentes?

- **Sumando o restado en ambos miembros de la ecuación la misma expresión.**
- **Multiplicando ambos miembros de la ecuación por un número real distinto de cero.**

***Resolución de una ecuación:* Las ecuaciones se resuelven utilizando ecuaciones equivalentes. Para eso se va "transformando" la ecuación original en otra/s ecuación/es equivalentes hasta obtener una ecuación de la forma $x = x_0$, donde x es una incógnita y x_0 es una constante real.**

Ejemplo 1:	
$x + 7 = 11$	
$x + 7 - 7 = 11 - 7$	Restamos 7 en ambos miembros
$\mathbf{x = 4}$	**Por lo tanto, la solución es 4**
Ejemplo 2:	
$5x - 2 = 8$	Sumamos 2 en ambos miembros
$5x - 2 + 2 = 8 + 2$	
$5x = 10$	
$\frac{1}{5}.5x = \frac{1}{5}.10$	Multiplicamos $\frac{1}{5}$ en ambos miembros
$x = 2$	**Por lo tanto, la solución es 2**
Ejemplo 3:	
$6.(x + 1) + 2 = 3x - 5$	
$6x + 6 + 2 = 3x - 5$	Aplicamos propiedad distributiva
$6x + 6 + 2 - 6 - 2 = 3x - 5 - 6 - 2$	Restamos 6 y 2 en ambos miembros
$6x = 3x - 13$	
$6x - 3x = 3x - 13 - 3x$	Restamos 3x en ambos miembros
$3x = -13$	
$\frac{1}{3}.3x = \frac{1}{3}.(-13)$	Multiplicamos $\frac{1}{3}$ en ambos miembros
$x = -\frac{13}{3}$	**Por lo tanto, la solución es $-\frac{13}{3}$**

Actividades

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $1 + 2x = 10x + 17$ f. $-2.(x - 1) = 2$

c. $5(x + 3) = -20$ g. $7 - 5x = 22$

d. $\frac{4-x}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ h. $\frac{6x+4}{-3} = -\frac{3}{4}x$

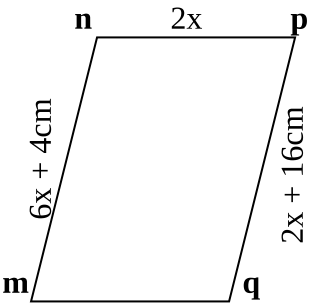
2) ¿Qué ecuación representa a cada uno de los siguientes enunciados? Escribirlas y resolverlas.

   a. El triple de un número es igual a su doble aumentado en tres cuartos.

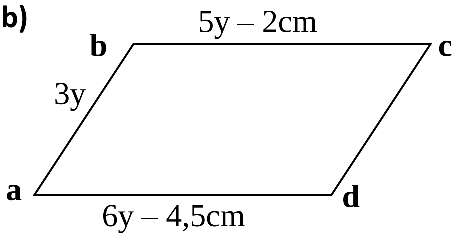
   b. Si a un número se le suma tres, se obtiene el mismo resultado que sumando ocho a su mitad.

3) Hallar la longitud de los lados de cada paralelogramo.

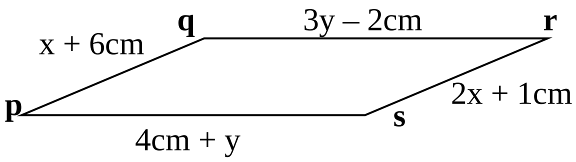
a)



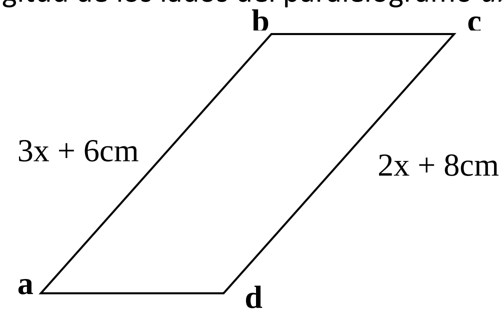
b)



c)



4) Calcular la longitud de los lados del paralelogramo *abcd* sabiendo que su perímetro es de 44cm.



5) Hallar la/s solución/es de cada ecuación:

a) $(6x - 12):2 = (x - 1).2$

b) $(2x - 3).6 + 2x = -4$

c) $6x - 2x = -2.(-3 - x) + 4$

d) $\frac{3}{7}x - 2^{-2} = -\frac{5}{4} + \frac{5}{2}x + 1$

e) $5 - x = \left(\frac{8+2x}{2}\right) + \sqrt{81}$

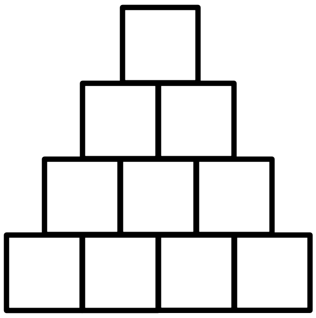
6) Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) La suma del doble de un número y cuatro es dieciséis. ¿Cuál es el número?

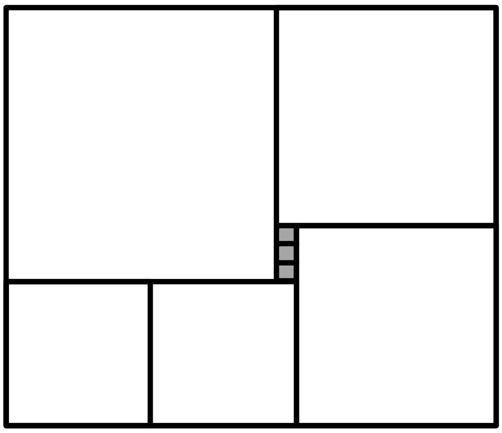
b) La suma del triple de un número y dos es igual a la diferencia entre el cuádruplo del número y dos. ¿Cuál es el número?

c) La base de un rectángulo es tres quintos de su altura y su perímetro es 40cm. Calculen las longitudes de la altura y la base.

d) Escribir un número en cada casilla para que se verifiquen las siguientes condiciones:
- En cada casilla de la fila inferior, excepto la primera, el número sea el doble que el de la casilla de su izquierda.
- En las demás casillas, cada número sea igual a la suma de los dos números de las casillas de la fila inmediata inferior que la tocan.
- La suma de los 10 números escritos sea igual a 2070.



e) Se tiene un rectángulo dividido en 8 cuadrados de lados enteros, como se muestra en la figura.



Los dos cuadrados sobre el lado inferior (a la izquierda) son iguales; los tres cuadraditos sombreados tienen lado 1. Calcular los lados de todos los cuadrados de la subdivisión.

f) Un rectángulo tiene 60cm de perímetro. La base es el doble de la altura. ¿Cuáles son sus dimensiones?

g) La superficie de un trapecio es $72cm^2$, sus bases tienen 11cm y 7cm de longitud. Calculen cuánto mide su altura.

h) Un trapecio mide 15cm de altura y 12cm de base menor; calculen la longitud de su base mayor sabiendo que su superficie es $240cm^2$.

i) La suma de tres números enteros consecutivos es 219. ¿Cuáles son esos números?

j) La suma de tres números enteros impares consecutivos es 189 ¿Cuáles son esos números?

k) La suma de cuatro números naturales consecutivos es igual al quíntuplo del menor. ¿Qué números son?

Ecuaciones lineales con infinitas soluciones y sin solución

<u>Problema 1</u>: En una reunión, Fabián quiso demostrar sus aptitudes para la magia, y propuso a sus amigos el siguiente "truco": *"Piensen un número cualquiera; multiplíquenlo por 6 y réstenle 12 a lo que obtuvieron, dividan por 3 el resultado obtenido, súmenle 9 y réstenle el doble del número elegido".*

Luego de que todos realizaron las operaciones pedidas, cada cual con el número que había elegido, les dijo: *"Mi poder me permite adivinar que todos obtuvieron 5 como resultado"*

Todos sus amigos asintieron sorprendidos. ¿Cómo hizo Fabián para adivinar el resultado obtenido por todos? ¿En qué consiste el truco?

Este problema se puede interpretar y resolver directamente a través del planteo y la resolución de una ecuación.

$\frac{6x-12}{3} + 9 - 2x = 5 \Rightarrow \frac{6x}{3} - \frac{12}{3} + 9 - 2x = 5 \Rightarrow 2x - 4 + 9 - 2x = 5 \Rightarrow 0x + 5 = 5 \Rightarrow 0.x = 0$

Las expresiones obtenidas en cada paso son equivalentes, en particular la primera y la última, por eso, se concluye que: $\frac{6x-12}{3} + 9 - 2x = 5$ (Para cualquier valor que se le asigne a x) $\Leftrightarrow$ $S = \mathbb{R}$.

Si se observa la última expresión puede notarse que, como cualquier número multiplicado por 0 da 0, la ecuación se verifica con cualquier número real.

<u>Problema 2</u>: Encontrar los valores de x que verifican la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{5}x + 3 = x - 2.\left(\frac{2}{5}x + 1\right)$$

Al resolver queda:

$\frac{1}{5}x + 3 = x - 2.\left(\frac{2}{5}x + 1\right) \Rightarrow \frac{1}{5}x + 3 = x - \frac{4}{5}x - 2 \Rightarrow \frac{1}{5}x - x + \frac{4}{5}x = -2-3 \Rightarrow 0x = -5.$

Se obtuvo una igualdad numérica, pero en este caso es falsa, porque 0 no es igual a -5. Como esto nunca ocurre, se concluye que la ecuación no tiene solución y su conjunto solución es: $S = \{\emptyset\}$.

Actividades

1) Resolver las siguientes ecuaciones e indicar en cada caso el conjunto solución:

a) $x - 3x = -2(x + 1)$

b) $\frac{2}{5}(x + 1) + 1 = 0$

c) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x = 3$

d) $x - (1 - x) = 2x - 1$

e) $-4(b + 6) - b = 0$

f) $(x - 2).(-15) = 5(4 - 3x) + 10$

g) $-x + \frac{2}{3}.(x - 1) = -\frac{x+2}{3}$

h) $2(4 - x) - (x - 6) = -3(x + 1)$

i) $2(k - 3) + k = 0$

j) $5(a + 2) + 1 = a + 2$

k) $\frac{x+1}{4} = \frac{2x-1}{3}$

l) $3x + 2 - x = -5 + 2x + 7$

2) Para cada una de las ecuaciones que siguen, indicar si el número que se propone es solución:

a) $4x - \frac{4}{3}(1 - x) = -3$; $x = 0$

b) $\frac{3x-2}{2} = \frac{2x-2}{4}$; $x = \frac{2}{5}$

c) $-\frac{2}{3}.(2 - b) = -\frac{1}{2}b$; $b = -1$

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas son aquellas en las que la variable está elevada al cuadrado. El siguiente es un ejemplo de una ecuación cuadrática:

$2x^2 + 5x + 10 = 15x - 2$

Teniendo en cuenta esta ecuación cuadrática se la puede igualar a cero de la siguiente manera:

$2x^2 + 5x + 10 - 15x + 2 = 0$

$2x^2 - 10x + 12 = 0$

Antes de pasar a resolver esta ecuación veremos sus elementos:

a = 2; b = -10 y c = 12 (son los coeficientes y el término independiente).

De manera general podemos decir que una ecuación cuadrática es del tipo:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

y se puede resolver utilizando la siguiente fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

En nuestro ejemplo: $2x^2 - 10x + 12 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.2.12}}{2.2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{4} =$$

O sea que:

$x_1 = \dfrac{10+2}{4} = 3$ y $x_2 = \dfrac{10-2}{4} = 2$

Otro ejemplo, la ecuación $2x^2 + 5x + 3 = 0$ de coeficientes a = 2, b = 5, c = 3, se resuelve así:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.2.3}}{2.2} = \frac{-5 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-5+1}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{-5-1}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

<u>Casos especiales:</u> **Las *ecuaciones de segundo grado* de los tipos siguientes se llaman *incompletas* porque les falta uno de los términos:**

$$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$$
$$\mathbf{ax^2 + c = 0}$$

Se pueden resolver aplicando la fórmula general, pero es más cómodo resolverlas despejando directamente la *x*.

- En el primer caso, $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x.(ax + b) = 0$
  Una solución es x = 0 y la otra se obtiene resolviendo la ecuación lineal ax + b = 0.
  Por ejemplo: $3x^2 + 5x = 0 \rightarrow x.(3x + 5) = 0 \rightarrow 3x + 5 = 0$ ó $x = 0$, despejando x concluimos que las soluciones son) $x_1 = 0$ y $x_2 = -5/3$.

- En el segundo caso, $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = -c/a \rightarrow |x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$

  Por ejemplo: $3x^2 - 75 = 0 \rightarrow 3x^2 = 75 \rightarrow |x| = \sqrt{\frac{75}{3}} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

Actividades

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1) $x^2 - 49 = 0$
2) $3x^2 = 12$
3) $x^2 - 10x + 16 = 0$
4) $9x^2 - 9x + 2 = 0$
5) $x^2 = 121$
6) $x^2 + 2x - 35 = 0$
7) $x^2 + 3x = 0$
8) $5x^2 = 10$
9) $5x^2 = 80$
10) $x^2 - 169 = 0$
11) $x^2 - 169 = -169$
12) $2x^2 - x - 3 = 0$
13) $x^2 + 11x = -24$
14) $x + 11 = 10x^2$
15) $x + 3x = -x^2$
16) $x^2 = 16x - 63$
17) $105 = x + 2x^2$
18) $8x^2 = 24$

Tipos de solución de una ecuación cuadrática

Análisis Del Determinante: $\Delta = b^2 - 4.a.c$

- $\Delta > 0$ En este caso, tendremos dos soluciones
  $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$ y $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$ Ej: los ejercicios anteriores.

- $\Delta = 0$ En este caso, las dos soluciones dadas por la fórmula cuadrática coinciden, y diremos que tenemos una solución doble; o también, dos soluciones repetidas.
  Ej: $x^2 + 4x + 4 = 0$

- $\Delta < 0$ En este caso, no hay soluciones, pues la expresión dentro del radical contiene una expresión negativa.
  Ej: $x^2 + 4x + 5 = 0$

Actividades

1) Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas e indicar si tienen dos soluciones, una solución o ninguna solución:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $16x^2 + 8x + 1 = 0$
c) $x^2 + 2x - 3 = 0$
d) $2x^2 + 4x + 2 = 0$
e) $x^2 - 9x - 22 = 0$
f) $x^2 - 6x + 9 = 0$
g) $x^2 - 8x + 16 = 0$
h) $x^2 - 5x - 50 = 0$

Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen fracciones polinómicas.

Ejemplo: $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x^2-1}} + \frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{x-1}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x+1}}$

Como en toda ecuación, el objetivo es encontrar el o los valores de x que verifiquen la igualdad. Es decir, despejar la x (o la letra que se tenga como incógnita en el ejercicio) para llegar a un resultado del tipo: $x = x_0$

Vamos a resolver la ecuación racional del ejemplo: $\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{x+1}$

1) Primero debemos ver qué valores no puede tomar la letra x, teniendo en cuenta que el denominador no puede ser cero. Si observamos los denominadores vamos a ver que: $x \neq 1$ y $x \neq -1$ (x no puede ser ni 1 ni -1).
2) Vamos a factorizar los denominadores que se puedan factorizar:
$$\frac{3}{(x+1).(x-1)} + \frac{x+2}{(x-1)} = \frac{x}{(x+1)}$$
Aquí podemos observar que el mínimo común múltiplo entre los tres denominadores es: (x+1).(x-1).
3) Ahora multiplicamos todos los términos por dicho mínimo común múltiplo: (x + 1).(x – 1):
$$\frac{3.\mathbf{(x+1).(x-1)}}{(x+1).(x-1)} + \frac{(x+2)\mathbf{(x+1).(x-1)}}{(x-1)} = \frac{x.\mathbf{(x+1).(x-1)}}{(x+1)}$$ y luego simplificamos:
$$\frac{3.\cancel{\mathbf{(x+1).(x-1)}}}{\cancel{(x+1).(x-1)}} + \frac{(x+2)\mathbf{(x+1)}.\cancel{\mathbf{(x-1)}}}{\cancel{(x-1)}} = \frac{x.\cancel{\mathbf{(x+1)}}.\mathbf{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}}$$ finalmente nos queda:
3 + (x + 2).(x + 1) = x.(x – 1), ahora aplicamos propiedad distributiva y resolvemos como una ecuación cualquiera:
$$3 + x^2 + x + 2x + 2 = x^2 - x$$
$$x^2 - x^2 + x + 2x + x = -3 - 2$$
$$4x = -5$$
$$\mathbf{x = -5/4}$$
Por lo tanto, x = -5/4 es la única solución de la ecuación.

Actividades

Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a. $\frac{x+2}{(x+3)} + \frac{3}{x^2+6x+9} = 1$

b. $\frac{7+x}{x+5} = \frac{x+3}{x+2}$

c. $\frac{x+5}{x^2-4} - \frac{x-4}{x^2+4x+4} = 0$

d. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5x-2}{x} = 5$

e. $\frac{x^2-1}{x^2} - \frac{x+2}{x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$

f. $\frac{4x}{x+2} + \frac{6x}{x-2} = \frac{30}{x^2-4}$

Ecuaciones con módulo

Concepto de módulo:

- **Si a es positivo o 0: $|\mathbf{x}|$ = a, ⇔ x = a** o **x = -a**
- **Si a es negativo:** $|\mathbf{x}|$ = a, **no tiene solución porque el módulo es una distancia y no puede ser negativa.**

  Ej: $|\mathbf{x}| = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

Las ecuaciones con módulo se resuelven de la siguiente manera:

$|5-6x| = 2 \Leftrightarrow 5 - 6x = 2$ o $5 - 6x = -2$

$-6x = 2 - 5$ | $-6x = -2 - 5$

$x = \frac{-3}{-6}$ | $-6x = -7$

$x_1 = \frac{1}{2}$ | $x_2 = \frac{7}{6}$

Otros ejemplos:

- $|4+2x| = 8 \Leftrightarrow$ $4 + 2x = 8$ o $4 + 2x = -8$

  $x = (8 - 4):2$ | $x = (-8 - 4): 2$

  $x_1 = 2$ | $x_2 = -6$

- $|5-6x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5 - 6x = \frac{1}{2}$ o $5 - 6x = -\frac{1}{2}$

  $x = \frac{\frac{1}{2} - 5}{-6}$ | $x = \frac{-\frac{1}{2} - 5}{-6}$

  $x_1 = \frac{3}{4}$ | $x_2 = \frac{11}{12}$

- $\frac{2}{3}|3x+2| - 4 = 8 \Leftrightarrow |3x+2| = (8 + 4) : \frac{2}{3} \Leftrightarrow |3x+2| = 18$

  $3x + 2 = 18$ o $3x + 2 = -18$

  $3x = 18 - 2$ | $3x = -18 - 2$

  $x = \frac{16}{3}$ | $x = -\frac{20}{3}$

Actividades

Resolver las siguientes ecuaciones con modulo:

a) $|2x-5| = 7$

b) $|x+11| = 2$

c) $\left|-\frac{1}{2}x+3\right| = \frac{3}{4}$

d) $5 - |x| = 1$

e) $\left|\frac{x+2}{8}\right| = \frac{3}{2}$

f) $-2. |x-3| + 6 = 0$

g) $9 - |2-x| = 1$

h) $|6-3x| + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Inecuaciones

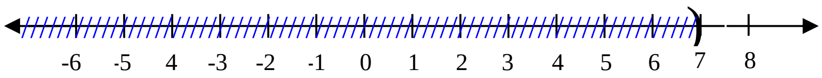
Las inecuaciones son <u>desigualdades</u> que contienen incógnitas.

En la vida cotidiana utilizamos desigualdades por ejemplo cuando decimos: "voy a comprar una remera, pero sólo tengo \$30", si llamamos x al precio de la remera, equivale a la desigualdad: $x \leq 30$.

O Bien, "compraremos un regalo, podemos gastar entre \$30 y \$50", llamamos x al precio, equivale a la desigualdad: $30 \leq x \leq 50$.

Ejemplo con números reales:
El triple de un número real disminuido en cuatro unidades es menor que diecisiete. ¿Qué números verifican este enunciado?
$3x - 4 < 17 \Rightarrow 3x < 17 + 4 \Rightarrow x < 21/3 \Rightarrow x < 7$. Como estamos trabajando con números reales, el conjunto solución es un intervalo $S = (-\infty ; 7)$.

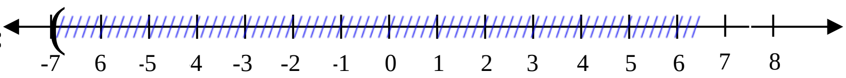
Representando en la recta numérica:



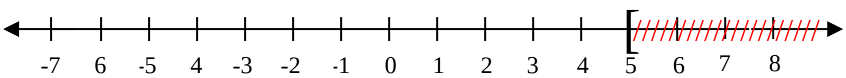
Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de todos los valores que la satisfacen.
Por lo visto, parecería que se resuelven como las ecuaciones. Sin embargo, el procedimiento no es exactamente igual.

Si a ambos miembros de una desigualdad se les suma o resta lo mismo, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la dada. Esto también ocurre si se multiplica o dividen ambos miembros por un número *positivo*. En cambio, si se los multiplica o divide por un número *negativo*, la desigualdad se invierte, porque se está cambiando el signo de los dos miembros.
Ejemplo: $-5 > -9$, si se cambian los signos de ambos miembros (o sea, se multiplica a ambos miembros por -1: $-5 > -9 \Rightarrow (-1).5 > -9 \Rightarrow 5 < (-9)/(-1) \Rightarrow 5 < 9$
Otro ejemplo: $-3x + 7 < 28 \Rightarrow -3x < 28 - 7 \Rightarrow -3x < 21 \Rightarrow x > 21/(-3) \Rightarrow x > -7$

Representación:



Cuando resolvemos inecuaciones cuyas desigualdades sean del tipo "$\geq$" o "$\leq$", en el conjunto solución se debe incluir el valor límite del intervalo escribiendo corchetes [ ]. Ejemplo: $x \geq 5$ $S = [5 ; +\infty)$



Actividades

Resolver las siguientes inecuaciones, escribir el conjunto solución y representar gráficamente:

a) $5x - 4 < -19$

b) $-4x + 9 > 2x - 3$

c) $2(x + 4) \geq 22$

d) $10 - 3x \leq -2(x + 4) + 7$

e) $8 - 2x \geq 2(4 - x)$

f) $3x + 1 > x - 3$

o) $3x - 5 < x + 7$

i) $x + 1 < -3(x + 2) - 1$

j) $-2(1 - x) > (x + 4).(-3)$

k) $3 + x \geq 2x - 1$

l) $64 + 2x < 9 - 3x$

m) $x + 4 \leq -x + 10$

n) $2^6 + 2x < (3^2)^2 + 7x + 3$

h) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 1$