MATEMÁTICA

5to Año Educación Secundaria

Profesor: Walter O. Rosello

Colegio Los Robles
San Andrés de Giles

Enlaces importantes

Enlace para descargar el cuadernillo de 5to año:

https://matematica-walter9.webnode.com/a5to-ano-es/

Enunciados de problemas históricos de Olimpíada Matemática Ñandú (desde 5to Año EP a 1er año ES):

https://omsag.webnode.com/enunciados-historicos/

Enunciados de problemas históricos de Olimpíada Matemática Argentina (OMA) (desde 2do año ES hasta 7mo año ES):

https://omsag.webnode.com/enunciados-historicos-oma/

OMSAG Blog: https://omsag.blogspot.com/

OMA Página Oficial: https://www.oma.org.ar/

OMA Foros: https://omaforos.com.ar/

Unidad N° 1: Logaritmos

Dado un número real *b* (llamado argumento), la función logaritmo le asigna el exponente *c* (o potencia) a la que un número fijo *a* (llamado base) se ha de elevar para obtener dicho argumento. Esta función se escribe como: $\log_a b = c$, lo que permite obtener *c*.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

(Esto se lee como: logaritmo en base "*a*" de "*b*" es igual a "*c*"; sí y solo si "*b*" es igual a "*a*" elevado a la "*c*")

- **La base *a* tiene que ser positiva y distinta de 1 ($a > 0$, $a \neq 1$).**
- ***b* tiene que ser un número positivo ($b > 0$).**
- ***c* puede ser cualquier número real ($c \in \mathbb{R}$).**

Ejemplos:

$\log_2 8 = 3$	**ya que**	**$2^3 = 8$.**
$\log_{12} 1 = 0$	**ya que**	**$(12)^0 = 1$**
$\log_{10} 10 = 1$	**ya que**	**$(10)^1 = 10$**
$\log_7 1/49 = -2$	**ya que**	**$(7)^{-2} = 1/49$**
$\log_{10} \sqrt{10} = 1/2$	**ya que**	**$10^{1/2} = \sqrt{10}$**
$\log_{1/2} 16 = -4$	**ya que**	**$(1/2)^{-4} = 2^4 = 16$**

Actividades

1) Calcular		2) Calcular el valor de x en cada caso:
a) $\log_7 343 =$	h) $\log_{1/2} 128 =$	a) $\log_x 125 = -3$
b) $\log_3 9 =$	i) $\log_{3/5} 125/27 =$	b) $\log_2(4x) = 3$
c) $\log_5 0{,}2 =$	j) $\log_6 1/216 =$	c) $\log_2 \sqrt{16} = x$
d) $\log_2 0{,}25 =$	k) $\log_2 \sqrt[3]{2} =$	d) $\log_3 \sqrt{27} = x$
e) $\log_{0,5} 16 =$	l) $\log_5 \sqrt[4]{5^3} =$	e) $\log_3 \sqrt{81} = x$
f) $\log_{0,1} 100 =$	m) $\log_3 \sqrt{3} =$	f) $\log_{1/2} 16 = x$
g) $\log_{0,4} 8/125 =$	n) $\log_7 \sqrt[3]{7^5} =$	

Propiedades de los logaritmos

- **Logaritmo de un producto:** El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Ejemplo: $\log_2 (64 .128) = \log_2 64 + \log_2 128 = 6 + 7 = 13$

- **Logaritmo de un cociente:** El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo (o del numerador) menos el logaritmo del divisor (o del denominador).

$$\log_a (b:c) = \log_a b - \log_a c$$

Ejemplo: $\log_5 (125 : 5) = \log_5 125 - \log_5 5 = 3 - 1 = 2$

Si el argumento está espresado como una fracción: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Ejemplo: $\log_3 \frac{81}{9} = \log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$

- **Logaritmo de una potencia:** El logaritmo de una potencia es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base.

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

Ejemplo: $\log_2 16^5 = 5 . \log_2 16 = 5 . 4 = 20$

- **Logaritmo de una raíz:** El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido el índice de la raíz.

$$\log_a \sqrt[c]{b} = \frac{\log_a b}{c}$$

Ejemplo: $\log_3 \sqrt[4]{27} = \frac{\log_3 27}{4} = \frac{3}{4}$

Actividades

3) Aplicar las propiedades de los logaritmos y resolver:

a) $\log_2(\sqrt[3]{16}.64)$ b) $\log_3\left(\frac{3}{\sqrt[4]{27}}\right)$ c) $\log_3(81 : 27^{1/4})$ d) $\log_3\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{27}\right)$

e) $\log_5(125^2.\sqrt[4]{25})$ f) $\log_3\left(\frac{81^3 \cdot 27^4}{\sqrt{27}}\right)$ g) $\log_2\left(\frac{512}{\sqrt[8]{64}}\right)$ h) $\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{9^5}\right)$

4) Sabiendo que log A = 2, log B = 3 y log C = 4. Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log A.\ B^2$ b) $\log \frac{A^3.C^5}{\sqrt{C}}\ .\ B$ c) $\log \sqrt[3]{A^5.B:C}$

d) $\log \sqrt{\frac{B}{C^3}}$ e) $\log \sqrt[4]{B^6}\ .\ A^8 : \sqrt{C^3}$ f) $\log \frac{C}{A}\ .\ B^3$

5) Aplicar las propiedades de los logaritmos y resolver:

a) $\log_{45} 5 + 2.\log_{45} 3$ b) $2.\log_{10} 4 + 2.\log_{10} 5 - \log_{10} 4$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 20 - \frac{1}{3}.\log_{\frac{1}{2}} 125$ d) $\log_{\frac{1}{9}} 2 + \log_{\frac{1}{9}} 8 + 2.\log_{\frac{1}{9}} \frac{3}{4}$

e) $\log_5 10 + 3.\log_5 4 - \log_5 \frac{128}{25}$ f) $\frac{1}{2}.\log_{\frac{2}{3}} 16 + \frac{1}{3}.\log_{\frac{2}{3}} 27 - \log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{3}$

6) Hallar el valor de X:

a) $\log_{\left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{\sqrt{5x^{3+3}} + x+1}\right)} 1 = x$ b) $\log_{\left(\frac{2+5\sqrt{3}}{7}\right)} \left[\frac{7}{2+5\sqrt{x}}\right] = -1$

c) $\log_{\left(\frac{-2\sqrt{3x}+4x^3}{5x^7+3}\right)} \left[\frac{1}{2}.x\right] = 0$ d) $\log_{(2x+6)}(16) = 1$

Logaritmos Decimales

Los logaritmos que tienen base 10 se llaman *logaritmos decimales*, y para representarlos se escribe sencillamente log sin necesidad de especificar la base:

$\log_{10} X = \log X$

Se escriben a continuación algunos ejemplos de logaritmos decimales:
log 1 = 0; ya que $10^{0} = 1$.
log 10.000 = 4; ya que $10^4 = 10.000$.
log 10 = 1; ya que $10^1 = 10$.
log 0,1 = -1; ya que $10^{-1} = 0,1$.

Antilogaritmos

Es el valor que toma el argumento de un logaritmo, conocidas la base y el resultado. Es decir, consiste en elevar la base al número obtenido en el resultado.

$$\mathbf{\log_b x = n \Leftrightarrow anti\log_b n = x \quad \Leftrightarrow b^n = x}$$

Ejemplo: log 100 = 2 ⇔ antilog 2 = 100 ⇔ $10^2 = 100$

Cálculo de logaritmos decimales y antilogaritmos con la calculadora

Vamos a suponer que tenemos que calcular el siguiente logaritmo decimal: $\log \frac{25^3 \,.\, \sqrt{12}}{9}$

Utilizando las propiedades obtenemos lo siguiente: $3. \operatorname{Log} 25 + \frac{\log 12}{2} - \log 9$

Esta operación la vamos a escribir en la calculadora, obteniendo por resultado lo siguiente:

$\mathbf{\log \frac{25^3 \,.\, \sqrt{12}}{9}}$ **= 3,77916814**; para obtener el antilogaritmo, que es el valor del argumento, o sea de $\frac{25^3 \,.\, \sqrt{12}}{9}$; sin borrar el resultado obtenido presionamos: SHIFT; log; ANS; =; obteniendo lo siguiente: **6014,065304**, por lo tanto: $\mathbf{\frac{25^3 \,.\, \sqrt{12}}{9}}$ **= 6014,065304.**

Actividad

7) Calcular los siguientes logaritmos decimales y sus antilogaritmos:

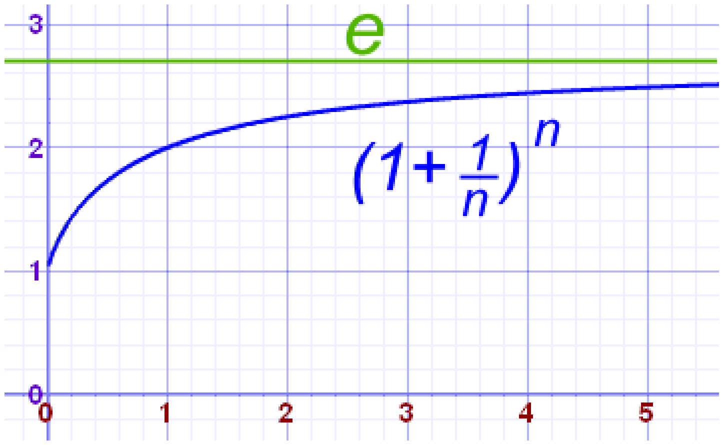
a) $\log \frac{2}{10}$
b) $\log \frac{3{,}8^2}{\sqrt[3]{5}}$
c) $\log\ (12.5)$
d) $\log \sqrt{8{,}31^2 . 6{,}2}$
e) $\log \frac{3{,}8 \,.1{,}2^2}{\sqrt[3]{5{,}3}}$
f) $\log \frac{(16{,}75)^2 \,.\, 2{,}63}{\sqrt[4]{1{,}28}}$
g) $\log \frac{(57{,}28)^2}{\sqrt[3]{2{,}28}}$
h) $\log \sqrt{3{,}26^3 : 2}$
i) $\log\ \left(2{,}8^5 . \sqrt{3{,}6 : 5}\right)$
j) $\log \frac{10{,}2^2}{\sqrt{7}}$
k) $\log \sqrt[3]{25^2 . 236}$
l) $\log\ \sqrt{\left(\frac{8{,}31}{6{,}42}\right)^2 . 6{,}2}$
m) $\log\ \sqrt{10{,}21^2\ :\ 6{,}58}$
n) $\log\ 89.\ \sqrt[10]{8{,}4\ .\ 9{,}1^3}$
o) $\log\ \sqrt{\frac{3{,}2}{1{,}35} \,.\, 8{,}4^{-3}}$
p) $\log\ 8{,}4 \,.\, \frac{6{,}7^2}{\sqrt[3]{9{,}5}}$
q) $\log\ \frac{7{,}2^{6/5}}{\sqrt[5]{5}} \,.\, 9$
r) $\log\ 12.\ \sqrt{5{,}4^6\ :\ 3}$
s) $\log\ 7{,}4^{-1} . \sqrt[5]{0{,}7^2 \,.\, 4}$
t) $\log\ 100^{-1} . \sqrt[3]{6{,}7^2}$
u) $\log\ 12^{-1} . \sqrt[4]{\frac{145}{15{,}2}}$

Logaritmos naturales

Se llaman logaritmos naturales a los logaritmos que tienen por base el número e. Se puede simbolizar de varias maneras: $\log_e x$, o $\ln x$, siendo la segunda la más común (Es la que aparece en las calculadoras).

<u>El número e</u>: El número "e" es un <u>número irracional</u> famoso, y es uno de los números más importantes en matemática.
El número "e" es llamado ocasionalmente número de Euler, debido al matemático suizo Leonhard Euler, o también constante de Neper, en honor al matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo al cálculo matemático.
Como "e" es un número irracional, su valor no puede ser dado exactamente como un número finito o con decimales periódicos. Las primeras cifras son:
***e* = 2,7182818284590452353602874713527 (y sigue...)**
<u>Calcularlo</u>: El valor de $(1 + 1/n)^n$ se aproxima a ***e*** cuanto más grande es n:

N	$(1 + 1/n)^n$
1	2,00000
2	2,25000
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827



El valor de ***e*** también es igual a: 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + 1/6! + 1/7! + ... (etc). Los primeros términos suman: 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 = 2,718055556

<u>Trucos para recordar el valor de e</u>: Para recordar el valor de e (hasta 10 cifras) apréndete esta frase (¡cuenta las letras!): El-trabajo-y-esfuerzo-de-recordar-e-revuelve-mi-estómago.
O puedes aprenderte la curiosa pauta de que después del "2,7" el número "1828" aparece dos veces: **2,7 1828 1828**
Y después de eso vienen los ángulos de un triángulo rectángulo isósceles (dos iguales) que son 45°, 90°, 45°: **2,7 1828 1828 45 90 45.**

Actividad

8) Calcular los siguientes logaritmos naturales y sus antilogaritmos:

a) $\ln e =$ (sin calculadora)

b) $\ln 1 =$ (sin calculadora)

c) $\ln \frac{1}{e} =$ (sin calculadora)

d) $\ln e^{-2} =$ (sin calculadora)

e) $\ln 10 =$

f) $\ln \sqrt{\frac{15}{2}} =$

g) $\ln \frac{13{,}2^2}{105} =$

h) $\ln \sqrt[3]{12^3 : 36}$

Cambio De Base

Para un mismo número X existen infinitos logaritmos, dependiendo de la base que se tome.

Por ejemplo, el logaritmo de 8 es 1, -1, 3, -3, etc. según que la base considerada sea 8, 1/8, 2, ½, etc.

Para calcular aquellos logaritmos en que el argumento no es potencia de la base, se debe recurrir a un cambio de base, utilizando logaritmos con bases convenientes o logaritmos decimales. Para esto se aplica la siguiente fórmula:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Siendo la nueva base (c) cualquier número real mayor que 0 y distinto de 1 (a > 0, a ≠ 1).

Ejemplo: $\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5.$

Si sucede que no podemos encontrar una base conveniente, entonces se pueden utilizar logaritmos decimales o logaritmos naturales y realizar el cálculo utilizando calculadora:

Ejemplo 1: $\log_5 2 = \dfrac{\log 2}{\log 5} = 0{,}430676558$ (En este caso se utilizó logaritmos decimales).

Ejemplo 2: $\log_5 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 5} = 0{,}430676558$ (En este caso se utilizó logaritmos naturales, pero se puede observar que el resultado es el mismo).

Actividad

9) Calcular los siguientes logaritmos utilizando un cambio de base conveniente. En caso de no encontrar una base conveniente, utilizar logaritmos decimales o naturales:

a) $\log_{16} 8 =$

b) $\log_9 27 =$

c) $\log_{64} 16 =$

d) $\log_{10} 0{,}2 =$

e) $\log_{125} 25 =$

f) $\log_{49} 7 =$

g) $\log_{12} 60 =$

h) $\log_{49} 100 =$

i) $\log_{243} 81 =$

j) $\log_{169} 13 =$

k) $\log_{128} 32 =$

l) $\log_{1000} 100 =$

m) $\log_9 36 =$

n) $\log_9 243 =$

o) $\log_{343} 49 =$

p) $\log_{111} 222 =$

q) $\log_{121} 11 =$

r) $\log_{64} 4 =$

s) $\log_{128} 16 =$

t) $\log_{32} 8 =$

u) $\log_{40} 200 =$

v) $\log_{400} 20 =$

Unidad N° 2: Números Reales

- **La unión de los números racionales y los irracionales forma el conjunto de los números reales: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.**
- **El conjunto de los reales es un conjunto totalmente ordenado e infinito.**
- **Se puede representar gráficamente el conjunto de los reales en una recta, en la que cada punto representa un número. Hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta numérica y sus elementos.**

Operaciones en R

1) Resolver las siguientes operaciones con números reales teniendo en cuenta los contenidos trabajados durante cuarto año de educación secundaria:

a. $6.\sqrt{3} - \frac{2}{3}.\sqrt{243} + \frac{8}{3}.\sqrt{27}$

b. $3.\sqrt{45} - 2.\sqrt{80} - \sqrt{20} + 4.\sqrt{125}$

c. $8.\sqrt[12]{5^3} + 3.\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3125}$

d. $6.\sqrt{3} - 2.\sqrt{243} + 8.\sqrt{27}$

e. $5.\sqrt{12} + 4.\sqrt{27} - \sqrt{75} + 2.\sqrt{147}$

f. $4.\sqrt[16]{3^4} + 3.\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{243}$

g. $5.\sqrt{2} - 2.\sqrt{32} + 3.\sqrt{128}$

h. $\sqrt[3]{375} : \sqrt[3]{3}$

i. $\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[12]{6}$

j. $(\sqrt{2} + 5\sqrt{5}).(-1\sqrt{2} + 5\sqrt{5})$

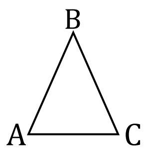
k. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}).(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$

l. $(\sqrt{7} + 3\sqrt{2})^2$

m. $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})^2$

n. $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3}$

2) Hallar el perímetro y la superficie de la siguiente figura:



a. $\overline{AB}=\overline{BC}=5\sqrt{5}$ $\quad \overline{AC}=2\sqrt{45}$

b. $\overline{AB}=\overline{BC}=5\sqrt{2}$ $\quad \overline{AC}=2\sqrt{32}$

Intervalos en R

Un intervalo real es un subconjunto de los reales y al igual que él, también es infinito.

- **<u>Intervalos acotados</u>:**
  - **Intervalo abierto: No incluye los extremos.** Ejemplo: (-2 , 5).
  - **Intervalo cerrado: Incluye los extremos.** Ejemplo: [3 , 6].
  - **Intervalo semiabierto por derecha: Incluye el extremo izquierdo y no incluyen el extremo derecho.** Ejemplo: [1 , 10).
  - **Intervalo semiabierto por izquierda: Incluye el extremo derecho y no incluyen el extremo izquierdo.** Ejemplo: (1 , 10].

- **<u>Intervalos no acotados</u>:**
  - **Intervalo infinitos:**

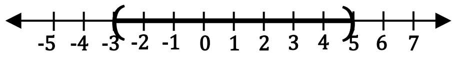
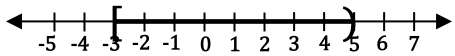
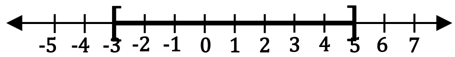
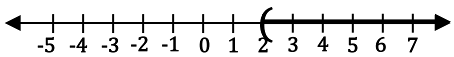
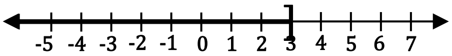
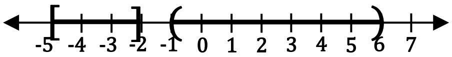
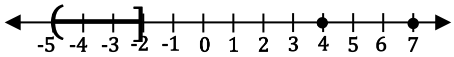
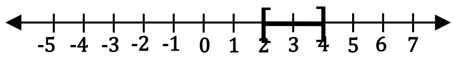
    Ejemplos: (-2 , ∞)

    [-6 , ∞)

    (-∞ , 5)

    (-∞ , 8]

- **Notación:**
  Existen diferentes tipos de notación. La utilizada en los ejemplos anteriores se denomina *notación de intervalo*, pero también se puede utilizar la *notación de conjunto* y la *representación geométrica en la recta numérica*.

Notación de intervalo	Notación de conjunto	Representación geométrica en la recta numérica
(-3 , 5)	**A = {x/x ∈ ℝ ⋀ -3 < x < 5}**	
[-3 , 5)	**B = {x/x ∈ ℝ ⋀ -3 ≤ x < 5}**	
[-3 , 5]	**C = {x/x ∈ ℝ ⋀ -3 ≤ x ≤ 5}**	
(2 , ∞)	**D = {x/x ∈ ℝ ⋀ x > 2}**	
(-∞ , 3]	**E = {x/x ∈ ℝ ⋀ x ≤ 3}**	
[-5 , -2]∪(-1 , 6)	**F = {x/x ∈ ℝ ⋀ -5 ≤ x ≤ -2 ⋁ -1 < x < 6}**	
(-5 , -2]∪{4 , 7}	**G = {x/x ∈ ℝ ⋀ -5 < x≤ -2 ⋁ x=4 ⋁ x=7}**	
(1 , 4] ∩ [2 , 6]	**H = {x/x ∈ ℝ ⋀ 1 < x ≤ 4 ⋀ 2 ≤ x ≤ 6}**	

Significado de los símbolos:

/ tal que **∪ unión** **∩ intersección**	**⋀ y (relacionado con intersección)** **⋁ o (relacionado con unión)** **$\mathbb{R}^+$ Reales positivos**	**∈ pertenece a** **∉ no pertenece a** **$\mathbb{R}^-$ Reales negativos**

Actividades

3) Escribir en notación de intervalo y representar en la recta real:
   a. A = {x/x ∈ ℝ ⋀ -2 < x < 3}
   b. B = {x/x ∈ ℝ ⋀ 2 ≤ x ≤ 5}
   c. C = {x/x ∈ ℝ ⋀ -1 < x ≤ 0}
   d. D = {x/x ∈ ℝ ⋀ x < 1}
   e. E = {x/x ∈ ℝ ⋀ x ∈ $\mathbb{R}^+$}
   f. G = {x/x ∈ ℝ ⋀ x ≥ 2 ⋀ x ≥ -1}
   g. I = {x/x ∈ ℝ ⋀ x ≥ -3 ⋁ x < 3}
   h. J = {x/x ∈ ℝ ⋀ -1 < x ≤ 1 ⋁ -2 ≤ x < 3}
   i. K = {x/x ∈ ℝ ⋀ x > 2 ⋀ x < 2}
   j. L = {x/x ∈ ℝ ⋀ -4 ≤ x < 6 ⋀ x ≠ 0}

4) Escribir en notación de conjuntos y representar en la recta real:
   a. A = [-2 , 3]
   b. B = (1 , 2)
   c. C = [0 , 4)
   d. D = (-∞, 2]
   e. E = (-∞ , 3) ∪ (3 , +∞)
   f. F = (-1 , 1) ∪ (2 , +∞)
   g. G = (-∞ , 4] ∪ (4 , +∞)
   h. H = (-2 , 2) ∩ [1 , 3]
   i. I = (-∞ , -1) ∩ [-1 , +∞)

Inecuaciones e Inecuaciones con valor absoluto

Vamos a ver diferentes tipos de inecuaciones divididas en cuatro apartados:

Apartado A: Inecuaciones lineales:

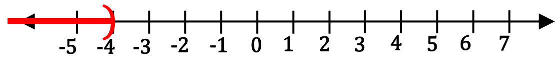
Ejemplo 1:

$5x - 2 < 3x - 10$

$5x - 3x < -10 + 2$

$2x < -8$

$\mathbf{x < -4}$



Solución: (-∞ , -4)

Ejemplo 2:

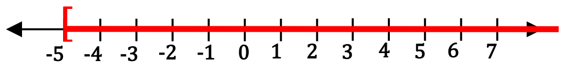
$-7x + 4 + 2x \leq -x + 24$

$-7x + 2x + x \leq +24 - 4$

$-4x \leq 20$

$X \geq 20 : (-4)$

$X \geq -5$



Solución: [-5, +∞)

Apartado B: Inecuaciones lineales con tres miembros:

Ejemplo 3: Método 1.

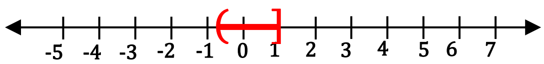
$3 < 3x + 5 \leq 8$

$3 - 5 < 3x \cancel{+5 - 5} \leq 8 - 5$

$-2 < 3.x \leq 3$

$\frac{-2}{3} < \frac{3.x}{3} \leq \frac{3}{3}$

$\mathbf{-\frac{2}{3} < x \leq 1}$

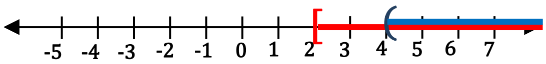


Solución: $\left(-\frac{2}{3}\,;1\right]$

Ejemplo 4: Método 2.

$10 \leq 4x + 2 > 18$

$10 \leq 4x + 2$	$4x + 2 > 18$
$10 - 2 \leq 4x$	$4x > 18 - 2$
$8 \leq 4x$	$4x > 16$
$8/4 \leq x$	$x > 16/4$
$2 \leq x$	$\mathbf{x > 4}$
$\mathbf{x \geq 2}$	



Solución: (4, +∞)

Apartado C: Inecuaciones con valor absoluto:

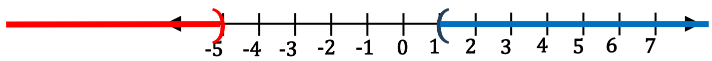
Ejemplo 5:

$|3x + 6| > 9$

$3x + 6 > 9$	U	$3x + 6 < -9$
$3x > 9 - 6$	U	$3x < -9 - 6$
$3x > 3$	U	$3x < -15$
$x > 3:3$	U	$x < -15:3$
$x > 1$	U	$x < -5$

$|x| > a$

$x > a$ U $x < -a$



Solución: (-∞, -5) ∪ (1 , +∞)

Ejemplo 6:

$|4x + 2| < 10$

$-10 < 4x + 2 < 10$

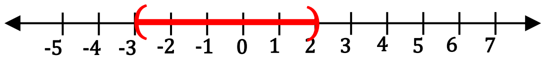
$-10 - 2 < 4x + 2 - 2 < 10 - 2$

$-12 < 4x < 8$

$-3 < x < 2$

$|x| < a$

$-a < x < a$



Solución: (-3, 2)

Apartado D: Inecuaciones con dos valores absolutos:

Ejemplo 7:

$|\mathbf{x} - \mathbf{2}| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{4}|$

$(\mathbf{x} - \mathbf{2})^2 \leq (\mathbf{x} + \mathbf{4})^2$

$(\mathbf{x} - \mathbf{2}).(\mathbf{x} - \mathbf{2}) \leq (\mathbf{x} + \mathbf{4}).(\mathbf{x} + \mathbf{4})$

$x^2 -2x -2x + 4 \leq x^2 + 4x + 4x + 16$

$-2x -2x -4x -4x \leq +16 - 4$

$-12.x \leq +12$

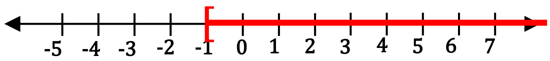
$X \geq +12:(-12)$

$X \geq -1$

IMPORTANTE

Válido	**No Válido**
4 > 3	**2 > -3**
$4^2 > 3^2$	**$2^2 > (-3)^2$**
16 > 9	**4 > 9 (falso)**

Se puede elevar al cuadrado en ambos miembros, siempre y cuando los valores en ambos miembros sean positivos.



Solución: (1 , +∞)

5) Resolver las siguientes inecuaciones y dibujar el conjunto solución en la recta real y en notación de intervalo:

Apartado A: Inecuaciones lineales

a) $x + 2 \geq 5$

b) $2x + 3 < x - 1$

c) $3x + 4 > 6x - 1\ 7$

d) $6x + 2 - 4x \leq 6 + x$

Apartado B: Inecuaciones lineales con tres miembros:

e) $8 < x + 6 < 10$

f) $0 \leq 3x + 6 < 9$

g) $10 > 4x + 5 < 1$

h) $7 \geq 3x - 2 > 1$

i) $8 \geq 7 + 2x > 2$

Apartado C: Inecuaciones con valor absoluto

j) $|x + 6| \geq 10$

k) $|2x - 1| > 7$

l) $|-18 - 3x| \leq 15$

m) $|x + 1| \leq 1$

n) $|x - 3| > 3$

Apartado D: Inecuaciones con dos valores absolutos

o) $|x - 1| < |x - 2|$

p) $|x + 1| < |x + 5|$

q) $|x - 7| \leq |x - 9|$

r) $|x + 2| \leq |x - 3|$

Unidad N° 3: Sucesiones

Una *sucesión* es una lista ordenada de objetos, cada uno de ellos denominado término (también elemento o miembro) de la sucesión y al número de elementos ordenados (posiblemente infinitos) se le denomina la longitud de la sucesión.

El orden en que aparecen los términos es relevante y un mismo término puede aparecer en más de una posición.

Ejemplos:

- 1, 2, 3, 4, 5, ….
- 3, 1, 3, 1, 3, 1,…
- 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

Término general de una sucesión

Cada sucesión se puede expresar mediante una fórmula que describe la regla general que cumplen sus términos.

Ejemplos:

a) Dada la sucesión cuyos primeros cinco términos son: $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=8$, $a_4=15$ y $a_5=24$. Se puede establecer que el término general es: $\mathbf{a_n = n^2 - 1}$.

b) $4, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, \frac{25}{4}, \ldots\ldots$ $\quad a_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

c) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}\ldots.$ $\quad a_n = \frac{n^2}{2^n}$

Actividades

1) Hallar el término general de las siguientes sucesiones: *
   a. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$
   b. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$
   c. $\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \ldots$
   d. $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 4$, $n \geq 1$.
   e. $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \frac{a_n}{3}$, $n \geq 1$.
   f. $\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{7}, \ldots$
2) Hallar el término sesenta de la sucesión del punto 1.a.
3) Hallar el término veinte de la sucesión del ejemplo b.
4) Hallar el término nueve de la sucesión del ejemplo c.
5) Hallar el término treinta de la sucesión del punto 1.d.
6) Hallar el término quince de la sucesión del punto 1.e.
7) Contestar verdadero o falso. En caso de ser falso, justificar.
   a. El número $\frac{169}{12}$ es un término de la sucesión del ejemplo b.
   b. El número $\sqrt{20}$ es el noveno término de la sucesión del punto 1.c.
   c. El número $\frac{2}{19683}$ es un término de la sucesión del punto 1.e.
   d. El número $\sqrt[3]{128}$ no puede ser un término de la sucesión del punto 1.f.
   e. El número 4 no puede ser un término de la sucesión del punto 1.c.

Tipos de sucesiones

- **Sucesiones convergentes:**
  Las sucesiones convergentes son las sucesiones que tienen límite finito.
  Ejemplo 1: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ $a_n = \frac{1}{n}$ Límite: 0
  Ejemplo 2: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ $a_n = \frac{n}{n+1}$ Límite: 1

- **Sucesiones divergentes:**
  Las sucesiones divergentes son las sucesiones que no tienen límite finito.
  Ejemplo: 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , … $a_n = 2n + 2$ Límite: ∞

- **Sucesiones oscilantes:**
  Las sucesiones oscilantes no son convergentes ni divergentes. Sus términos alternan de mayor a menor o viceversa.
  Ejemplo: 1 , 0 , 3 , 0 , 5 , 0 , …

- **Sucesiones alternadas:**
  Las sucesiones alternadas son aquellas que alternan los signos de sus términos.
  Ejemplo 1: 1 ; -1 ; 0,5 ; -0,5 ; 0,25 ; -0,25 ; 0,125 ; -0,125 ; …
  Ejemplo 2: -1 , 1 , -2 , 4 , -3 , 9 , -4 , 16 , -5 , 25 , -6 , 36 , …

Sucesiones monótonas

- **Sucesiones monótonas crecientes: Se dice que una sucesión de números reales es *monótona creciente* si cada término es menor o igual que el siguiente. Es decir, los términos van aumentando su valor o, a lo sumo, son iguales.**
  En el caso de que no tenga términos iguales, la sucesión es *estrictamente creciente*.
  Ejemplo 1: 1, 1, 2, 3, 5, … (sucesión monótona creciente).
  Ejemplo 2: 1, 2, 3, 4, 5,…. (sucesión monótona estrictamente creciente).

- **Sucesiones monótonas decrecientes: Se dice que una sucesión de números reales es *monótona decreciente* si cada término es mayor o igual que el siguiente. Es decir, los términos van disminuyendo su valor o, a lo sumo, son iguales.**
  En el caso de que no tenga términos iguales, la sucesión es *estrictamente decreciente*.
  Ejemplo 1: 100, 100, 98, 98, 96, 96, … (sucesión monótona decreciente).
  Ejemplo 2: 8, 3, -2, -7, -12, … (sucesión monótona estrictamente decreciente).

Cotas de sucesiones

- **Sucesiones acotadas inferiormente:**
  Una sucesión está acotada inferiormente si todos sus términos son mayores o iguales que un cierto número k, que llamaremos cota inferior de la sucesión.
  $a_n \geq k$
  - A la mayor de las cotas inferiores se le llama extremo inferior o ínfimo.
  - Si el ínfimo de una sucesión es uno de sus términos se le llama mínimo.

  Ejemplo: 1, 1, 2, 3, 5, … (Cotas inferiores: 1, 0, -1, -2, etc. – Ínfimo: 1 – Mínimo: 1)

- **Sucesiones acotadas superiormente:**
  Una sucesión está acotada superiormente si todos sus términos son menores o iguales que un cierto número k', que llamaremos cota superior de la sucesión.
  $a_n \leq k'$
  - A la menor de las cotas superiores se le llama extremo superior o supremo.
  - Si el supremo de una sucesión es uno de sus términos se llama máximo.
    Ejemplo: 10, 5, 0, -5, -10, … (Cotas superiores: 10, 11, 12, etc. – Supremo: 10 – Máximo: 10)

Otros ejemplos de sucesiones:

Ejemplo 1: a_n: 1, 2, 3, 4, 5, ….n

- Es divergente.
- Es monótona estrictamente creciente.
- Está acotada inferiormente.
- Cotas inferiores: 1, 0, -1, etc.
- El mínimo es 1.

Ejemplo 2: a_n: 2, -4, 8, -16, 32, …., $(-1)^{(n-1)}.2^n$

- Es alternada.
- No es ni monótona creciente ni monótona decreciente.
- No está acotada porque va alternando valores positivos y negativos cada vez más altos en valor absoluto.

Ejemplo 3: a_n: 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, …..,$\frac{n+1}{n}$

- Es convergente con límite=1
- Es monótona estrictamente decreciente.
- Está acotada superiormente.
- Cotas superiores: 2, 3, 4…
- El máximo es 2.
- Está acotada inferiormente.
- Cotas inferiores: 1, 0, -1...
- El ínfimo es 1.
- No tiene mínimo, ya que 1 no pertenece a la sucesión.

Actividades

8) Dada la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

   a. Calcular los primeros diez términos de la sucesión.
   b. ¿Cuánto vale a_{100}? ¿y a_{1000}?
   c. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones argumentando las respuestas:
      i. Los términos de la sucesión son positivos.
      ii. En la sucesión cada término es mayor que el anterior.
      iii. Si se toman n suficientemente grandes, los términos de la sucesión son mayores que 3.
      iv. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $2 < a_n < 3$.
      v. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $2 \leq a_n < 3$.

9) Estudiar la convergencia o divergencia, la monotonía y las cotas de las siguientes sucesiones:

   a. a_n = -1, -2, -3, -4, -5 , …. –n
   b. $a_n = \frac{1}{n}$
   c. $a_n = \frac{n+2}{2n-1}$
   d. $a_n = \frac{n}{n+1}$
   e. $a_n = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, ….$
   f. $a_n = \frac{2n-1}{n}$
   g. $a_n = \frac{n^2+2}{4n}$
   h. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

10) Calcular, si existe, el límite de las siguientes sucesiones (*).

   a. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
   b. $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$
   c. $a_n = (-1)^n.\ \frac{2^n+5}{3^n}$
   d. $a_n = \sqrt[n]{n^2+1}$
   e. $a_n = (0{,}95)^n$
   f. $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-5}\right)^n$

Unidad N° 4: Expresiones Algebraicas

Polinomios

Un *polinomio* o *función polinómica* es una expresión del tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- **a_n; a_{n-1}; a_{n-2};…; a_1; a_0 se llaman *coeficientes*, y son números reales.**
- **Los exponentes de x son números naturales.**

<u>Grado</u>: El *grado* de un polinomio es el mayor de los exponentes al que se encuentra elevada la variable x.

<u>Coeficiente principal</u>: a_n es el *coeficiente principal* del polinomio. Cuando el coeficiente principal el 1, al polinomio se lo llama: *mónico*.

<u>Término independiente</u>: a_0 es el *término independiente* del polinomio.

Clasificación de un polinomio según su grado	Denominación de un polinomio según la cantidad de términos
P(x) = 3x + 1 (Primer grado)	**Monomio: P(x) = $3x^2$** (un término)
S(x) = $5x^2 - 3x$ (Segundo grado)	**Binomio: Q(x) = 5x + 3** (dos términos)
R(x) = $6x^3 + 2x^2 + 6$ (Tercer grado)	**Trinomio: S(x) = $3x^2 + 5x - 6$** (tres términos)
T(x) = $-2x^4 + 6x - 8$ (Cuarto grado)	**Cuatrinomio: R(x) = $2x^3 - 6x^2 + 4x + 3$** (cuatro términos)
Q(x) = $7x^5 - 3x^3 + 7x$ (Quinto grado)	**A partir de aquí se los llama polinomios, sin importar la cantidad de términos que tengan: cinco, seis, siete, etc.**
También se los puede llamar polinomio de grado 2, polinomio de grado 6, polinomio de grado 3, etc.	

<u>Polinomio completo y ordenado</u>: Dado el siguiente polinomio: $P(x) = 3x^2 + 5x^3 - 4x^5 - 6$, el mismo se encuentra desordenado (porque los exponentes de la variable x no aparecen en orden decreciente) e incompleto (porque faltan los términos x^4 y x). Para completar y ordenar el polinomio, lo debemos escribir de la siguiente manera: $P(x) = -4x^5 + 0x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 0x - 6$

Este es un polinomio completo y ordenado, de quinto grado, su coeficiente principal es -4, su término independiente es -6.

<u>Opuesto de un polinomio</u>: Un polinomio opuesto a otro se obtiene cambiando todos los signos de los coeficientes. Ejemplo: Si tenemos el polinomio: $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$. El opuesto de P(x) se simboliza –P(x) y se escribe: $-P(x) = -3x^2 - 5x + 2$.

1) Para cada uno de los siguientes polinomios indicar: coeficiente principal, término independiente y grado:
   a. $P(x) = 10x^4 - 20x^3 + 7$
   b. $Q(t) = -3t + 11t^8$
   c. $R(x) = 8x^4 + 6x^7 - 5$
   d. $T(m) = -90m^5 + 7m^9 + 5$
2) Ordenar y completar los polinomios del ejercicio anterior.

<u>Potenciación de polinomios</u>:

- Dado el monomio: $R(x) = 2x^3$, para calcular $[R(x)]^2$, debemos tener en cuenta que: $[R(x)]^2 = R(x).R(x)$, por lo tanto: $[R(x)]^2 = (2x^3).(2x^3) = 4x^6$.
- Dado el polinomio: $Q(x) = -7x^3 + 5$. Para calcular $[Q(x)]^2$, debemos tener en cuenta que: $[Q(x)]^2 = Q(x).Q(x)$, por lo tanto:
  $Q(x)^2 = (-7x^3 + 5).(-7x^3 + 5) = 49x^6 - 35x^3 - 35x^3 + 25 = 49x^6 - 70x^3 + 25$.
  También podemos tener en cuenta lo siguiente:
  - **<u>Cuadrado de un binomio:</u> $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$**
    Ejemplo 1: $(x + 5)^2 = x^2 + 2.x.5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$.
    Ejemplo 2: $(2x - 3)^2 = (2x)^2 + 2.2x.(-3) + (-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
  - **<u>Cubo de un binomio:</u> $(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$**
    Ejemplo 1: $(x + 2)^3 = x^3 + 3.x^2.2 + 3.x.2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.
    Ejemplo 2: $(x - 3)^3 = x^3 + 3.x^2.(-3) + 3.x.(-3)^2 + (-3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$.

Actividades

3) Dados los siguientes polinomios:

$R(x) = -5x^2 + 3$
$S(x) = x + 4$
$T(x) = 2x – 1$
$U(x) = 3x - 5$

Hallar: coeficiente principal, grado y término independiente de los polinomio que resultan de realizar los siguientes cálculos:

a. $R(x)^2$
b. $S(x)^3$
c. $T(x)^3$
d. $T(x)^2$
e. $U(x)^2$
f. $U(x)^3$

Raíces de un polinomio

El polinomio $P(x) = x^2 + x – 2$ es igual a cero para $x = 1$ y $x = -2$, es decir, $P(1)=0$ y $P(-2)=0$. A estos valores, 1 y -2, se los llama *raíces* del polinomio o ceros del polinomio.

Un número *r* es una raíz del polinomio P(x) si el valor numérico de P(x), para x = *r*, es igual a cero. Es decir, *r* es raíz de P(x) si P(*r*) = 0.

<u>Propiedad</u>: Un número *r* es raíz de un polinomio P si y sólo si x-*r* es un factor de P.

Ejemplo: Como ya se dijo, $x = 1$ es una raíz del polinomio $P(x) = x^2 + x – 2$, o sea que $P(1)=0$. Entonces, de acuerdo con la propiedad, $x – 1$ es un factor (o divisor) de P(x). Aplicando la regla de Ruffini se obtiene:

	1	1	-2
1	↓	1	2
	1	2	0

La división es exacta, ya que el resto es 0. El cociente de la división es x + 2.

De la misma manera, $x = -2$ también es una raíz del polinomio $P(x) = x^2 + x – 2$, o sea que $P(-2)=0$. Entonces, de acuerdo con la propiedad, $x + 2$ es un factor (o divisor) de P. Aplicando la regla de Ruffini se obtiene:

	1	1	-2
-2	↓	-2	2
	1	-1	0

La división es exacta, ya que el resto es 0. El cociente de la división es x - 1.

Número máximo de raíces reales

Observar los siguientes ejemplos de polinomios, que están expresados como producto de factores:

- $P(x) = 5x – 10 = 5.(x – 2)$ tiene una raíz: $x = 2$.
- $Q(x) = x^2 – 1 = (x + 1).(x – 1)$ tiene dos raíces: $x = 1$, $x = -1$.
- $T(x) = x^3 – x = x.(x^2 – 1)= x.(x + 1).(x – 1)$ tiene tres raíces: $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$.
- $V(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces reales, ya que cualquier número real al cuadrado es positivo, y al sumarle 1 seguirá siendo positivo y no podrá ser cero.
- $U(x) = x^4 – 1 = (x^2 – 1).(x^2 + 1) = (x + 1).(x – 1).(x^2 + 1)$ tiene sólo dos raíces, correspondientes a los factores $x + 1$ y $x – 1$, mientras que el factor $x^2 + 1$ no proporciona ninguna raíz real.

Un polinomio de grado *n* tiene, a lo sumo, *n* raíces reales.

Polinomios primos y compuestos

Un polinomio de grado no nulo es *primo* cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor. O sea que no tiene raíces reales.

Por ejemplo, son primos: $Q(x) = -x + 6$ $R(x) = x^2 + 4$ $S(x) = x^2 + x + 1$

Cuando un polinomio no es *primo*, entonces es ***compuesto***. Los polinomios de grado impar mayor que uno son compuestos, ya que tienen por lo menos una raíz real ***r***, y entonces se puede expresar como producto de polinomios de grado positivo menor.

Actividades

4) Verificar que uno de los factores del polinomio $P(x) = x^4 – 2x^3 + x^2 – 3x + 2$ es $x - 2$.
5) El polinomio $x^2 – 5x + 6$ se anula para $x = 2$ y $x = 3$ ¿Qué factores tiene?
6) Determinar si $x = -3$ y $x = 2$ son raíces del polinomio $Q(x) = x^4 + 3x^3 – x – 3$.
7) ¿Puede el polinomio $R(x) = x^4 + 3x – 1$ tener cinco raíces reales? ¿Por qué?
8) Si las únicas dos raíces del polinomio $S(x) = 2x^2 + 4x – 6$ son $x = -3$ y $x = 1$. Escribirlo como el producto de sus factores.

Factorización de Polinomios

En general, un polinomio está factorizado si está expresado como producto de polinomios de primer grado y/o polinomios de segundo grado que no tengan raíces reales.

<u>Propiedad</u>: Si se conocen todas las raíces reales de un polinomio, éste puede factorizarse utilizando el hecho de que si un número *r* es una raíz de un polinomio P(x), entonces x - *r* es un factor de P(x).

Todo polinomio P(x) compuesto y de grado *n*, que tenga *n* raíces reales, puede factorizarse como:

$$P(x) = a_n.(x – r_1).(x – r_2)....(x – r_n)$$

a_n es el coeficiente principal de P(x)

$r_1, r_2, ..., r_n$ son las *n* raíces reales de P(x)

<u>Ejemplo 1:</u> El polinomio $P(x) = x^2 + x – 2$, tiene solamente las dos raíces $x = 1$ y $x = -2$, como se vio en la página anterior. Por lo tanto tiene dos factores: $(x – 1)$ y $(x + 2)$. O sea que el polinomio P(x) es igual al producto de los dos factores multiplicado por el coeficiente principal:

$P(x) = 1.(x – 1).(x + 2)$.

Coeficiente principal de P(x)

Factores de P(x)

Como el coeficiente principal es 1, directamente se puede escribir: **$P(x) = (x – 1).(x + 2)$**

<u>Ejemplo 2</u>: El polinomio $Q(x) = 2x^3 – 4x^2 – 10x + 12$ tiene tres raíces: $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$. Por lo tanto, el polinomio Q(x) tiene tres factores: $(x + 2)$; $(x – 1)$ y $(x – 3)$.

Como el polinomio es de tercer grado, puede tener como máximo tres raíces reales (en este caso $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$), por lo tanto, el polinomio Q(x) es igual al producto de los tres factores multiplicado por el coeficiente principal: **$Q(x) = 2.(x + 2).(x – 1).(x – 3)$.**

<u>Ejemplo 3</u>: El polinomio $T(x) = x^2 + 2x - 15$ tiene dos raíces: $x = -5$ y $x = 3$. Por lo tanto, el polinomio T(x) tiene dos factores: $(x + 5)$ y $(x – 3)$.

Como el polinomio es de segundo grado, puede tener como máximo dos raíces reales (en este caso $x = -5$ y $x = 3$), por lo tanto, el polinomio T(x) es igual al producto de los tres factores multiplicado por el coeficiente principal: **$T(x) = (x + 5).(x – 3)$.**

Teorema de Gauss

En general, no es sencillo hallar las raíces de un polinomio, en especial si éste es de grado mayor que 1. Afortunadamente, existe un teorema que permite, bajo ciertas condiciones, encontrar raíces de un polinomio.

> **Sea P(x) un polinomio en el que todos sus coeficientes son enteros, y el término independiente es distinto de cero.**
>
> **Si P(x) tiene raíces racionales, es decir, números de la forma $\frac{p}{q}$ (p y q números enteros, $q \neq 0$), entonces p es un divisor del término independiente y q es un divisor del coeficiente principal.**

Este teorema recibe el nombre de **teorema de Gauss.**

Por ejemplo, el polinomio $S(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ tiene todos sus coeficientes enteros y el término independiente es distinto de 0; por lo tanto, cumple con las condiciones del teorema de Gauss. Así, si S(x) tiene raíces racionales $\frac{p}{q}$, **p** será un divisor del término independiente 2, y **q** será un divisor del coeficiente principal 3.

- Los posibles valores de **p** son los divisores de 2: ±1, ±2.
- Los posibles valores de **q** son los divisores de 3: ±1, ±3.
- posibles valores de $\frac{p}{q}$ son: $\pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}$.

Podemos utilizar el teorema del resto para ver cuál de todos estos números es raíz del polinomio S(x).

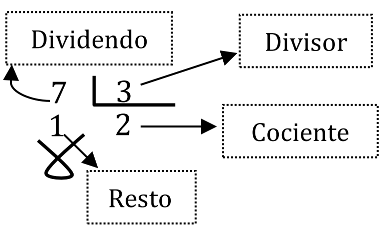
- $S(1) = 3.1^3 - 4.1^2 - 5.1 + 2 = -4$ (o sea que 1 no es raíz de S(x)).
- $S(-1) = 3.(-1)^3 - 4.(-1)^2 - 5.(-1) + 2 = 0$ (o sea que -1 es raíz de S(x)).

Como x = -1 es raíz de S(x), uno de sus factores es (x + 1). Entonces, aplicando la regla de Ruffini vamos a dividir al polinomio S(x) por el factor (x + 1):

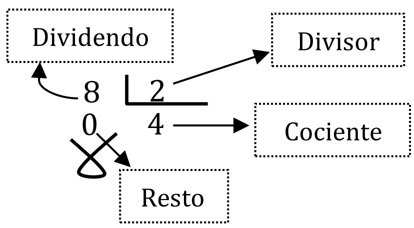
	3	-4	-5	2
-1	↓	-3	7	-2
	3	-7	2	0

La división es exacta, ya que el resto es 0.
El cociente de la división es $3x^2 - 7x + 2$.

Cuando realizamos una división, el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto. Vamos a ver unos ejemplos numéricos sencillos con números naturales:



Por lo tanto: **7 = 3.2 + 1**



Por lo tanto: **8 = 2.4 + 0** (Se puede escribir: **8=2 . 4**)

En el caso de los polinomios pasa lo mismo, volviendo al ejemplo anterior lo que hicimos fue dividir el polinomio $S(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ (*dividendo*) por x + 1 (*divisor*), obteniendo el *cociente* $3x^2 - 7x + 2$ y el *resto* 0. Por lo tanto:

$$\underbrace{S(x)= 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x + 1)}_{\text{Divisor}}.\underbrace{(3x^2 - 7x + 2)}_{\text{Cociente}}$$
(El resto no hace falta sumarlo porque es 0).

Por lo tanto, el polinomio S(x) al principio estaba expresado como un polinomio de grado tres y ahora pasó a estar expresado como un producto de un binomio de grado uno por un trinomio de grado dos: **$S(x)= (x + 1).(3x^2 - 7x + 2)$**

Lo que hay que tratar de hacer ahora es hallar las raíces del trinomio $3x^2 - 7x + 2$. Para ello podemos utilizar nuevamente el **teorema de Gauss**, o bien, como se trata de una expresión cuadrática, utilizar la **fórmula de la resolvente**:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Como a = 3; b = -7 y c = 2:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.3.2}}{2.3} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$x_1 = \frac{7+5}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

O sea que las otras dos raíces del polinomio S(x) son x = 2 y x = $\frac{1}{3}$, eso quiere decir que $\left(x - \frac{1}{3}\right)$ y (x - 2) son factores del polinomio S(x), por lo tanto, S(x) es igual al producto de los tres factores hallados multiplicado por el coeficiente principal:

$$\mathbf{S(x) = 3.(x + 1).(x - 2).\left(x - 1/3\right).}$$

Este polinomio está factorizado, porque está expresado como producto de polinomios de primer grado.

Actividades

9) Factorizar los siguientes polinomios utilizando el teorema de Gauss.
   a. $F(x) = 5x^3 - 4x^2 - 5x + 4$.
   b. $G(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.
   c. $H(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$.
   d. $M(x) = 9x^3 + 36x^2 - x - 4$.
   e. $J(x) = x^4 - 3x^3 - 31x^2 + 63x + 90$.
   f. $I(x) = 5x^2 - 10x - 15$.

Recurso informático: Utilizando GeoGebra, se pueden factorizar rápidamente algunos polinomios. Para eso debemos escribir en “Entrada:” el comando “Factoriza” y luego cargar el polinomio a factorizar. El programa devuelve el polinomio factorizado (en la columna “Vista algebraica” y un gráfico de la función correspondiente (en la columna “Vista gráfica”).

Importante: En caso de que las raíces fuesen número irracionales, utilizar el comando “FactorizaI”. Por ejemplo: FactorizaI[x^2 – 3] y el programa escribirá: $(x - \sqrt{3}).(x + \sqrt{3})$.

De igual manera, teniendo un polinomio factorizado, podemos obtener su forma desarrollada escribiendo en “Entrada:” el comando “Desarrolla” y luego ingresando el polinomio a desarrollar.

Casos de factoreo

Existen algunas técnicas para factorizar polinomios que se pueden utilizar sin necesidad de recurrir al teorema de Gauss. Estas técnicas se denominan comúnmente *casos de factoreo* y se pueden aplicar si el polinomio cumple con determinadas condiciones.

1° Caso de factoreo: Factor común: A veces sucede que en un polinomio P(x) la variable **x** figura en todos los términos. En este caso es muy conveniente *extraer factor común*. También se puede extraer un número que es factor de todos los coeficientes. Después se divide cada término del polinomio por el factor común:

Ejemplos:

- $P(x) = 7x^5 + 5x^4 + x^3$ en este caso la variable x se repite en los tres términos del polinomio. Hay que extraer la que está elevada a la menor de sus potencias y luego dividir cada término del polinomio por lo que hemos extraído, en este caso x^3. Entonces nos queda:
  $P(x) = x^3.(7x^2 + 5x + 1)$.
- $Q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2$ en este caso no sólo se repite la variable x sino que todos los coeficientes son múltiplos de 2, o sea que 2 es factor de todos los coeficientes. Por lo tanto podemos extraer $2x^2$ y nos queda: **$Q(x) = 2x^2.(x^2 - 3x + 2)$.**

- $S(x) = 16x^3 + 8x^2 – 2x + 4$ en este caso la variable x no se repite en todos los términos, pero todos los coeficientes son múltiplos de 2, o sea que solamente podemos extraer el 2. No queda: **$S(x) = 2.(8x^3 + 4x^2 – x + 2)$.**

10) Factorizar los siguientes polinomios utilizando el primer caso de factoreo: factor común:
   a. $24x^3 + 16x^2 – 4x^4$
   b. $25x^4 + 10x^3 – 5x^2$
   c. $8x^3 – 5x^2$
   d. $12x^3 + 6x^2 – 3x$
   e. $5x^4 – 10x + 15x^3 + 20x^2$
   f. $10x^3 + 15x^2$
   g. $\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

2° Caso de factoreo: Factor común por grupos: Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

- Ejemplo 1: $V(x) = 7x^5 – 5x^4 + 14x – 10$
  Formamos dos grupos: $V(x) = (7x^5 – 5x^4) + (14x – 10)$. En el primer grupo extraemos x^4 de factor común y en el segundo grupo extraemos 2 de factor común, entonces nos queda: $V(x) = x^4.(7x – 5) + 2.(7x – 5)$. Ahora nos quedaron dos términos, y en ambos podemos ver que se repite (7x - 5), por lo tanto sacamos factor común (7x – 5) y nos queda: **$V(x) = (7x – 5).(x^4 + 2)$.**
- Ejemplo 2: $W(x) = 3x^8 + x^7 – 2x^5 + 3x^3 + x^2 – 2$
  Formamos dos grupos: $W(x) = (3x^8 + x^7 – 2x^5) + (3x^3 + x^2 – 2)$. En el primer grupo extraemos x^5 de factor común y en el segundo grupo no podemos extraer nada, así que lo dejamos como está: $W(x) = x^5.(3x^3 + x^2 - 2) + (3x^3 + x^2 – 2)$. Ahora nos quedaron dos términos, y en ambos podemos ver que se repite $(3x^3 + x^2 – 2)$, por lo tanto sacamos

factor común $(3x^3 + x^2 – 2)$ y nos queda: **$W(x) = (3x^3 + x^2 – 2).(x^5 + 1)$**.

11) Aplicar factor común por grupos a los siguientes polinomios:
   a. $A(x) = x^3 – x^2 + 7x – 7$
   b. $B(x) = 3x^5 + x^4 – 9x – 3$
   c. $C(x) = 2x^3 + x^2 – 6x – 3$
   d. $D(x) = 3x^3 + 2x^2 – 3x – 2$
   e. $E(x) = 2x^3 – 6x^2 + x - 3$
   f. $F(x) = 4x^3 + 8x^2 + 8x + 16$
   g. $G(x) = 9x^5 + 9x + 2x^4 + 2$
   h. $H(x) = 10x^3 - 4x + 15x^2 - 6$

3° Caso de factoreo: Trinomio Cuadrado Perfecto: Cuando se trabajó potenciación de polinomios se vio el cuadrado de un binomio: **$(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$**

Para que un polinomio sea un *trinomio cuadrado perfecto*, es necesario que sea de grado par y que tenga la misma estructura que el trinomio $a^2 + 2.a.b + b^2$.

- Ejemplo 1:

$P(x) = 9x^2 + 30x + 25$

Este término es el cuadrado de **3x** ya que $(3x)^2 = 9x^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

Este término es el cuadrado de **5** ya que $5^2 = 25$

Para que sea el cuadrado de un binomio **"2.3x.5"** debe ser igual a **30x**. Multiplicando **2.3x.5** obtenemos efectivamente **30x**, por lo tanto podemos afirmar que el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto.

Por último, podemos afirmar que: $P(x) = 9x^2 + 30x + 25 =$ **$(3x + 5)^2$** y ya nos queda el polinomio factorizado.

Debemos tener cuidado, porque no todos los trinomios son trinomios cuadrados perfectos.

- Ejemplo 2: $Q(x) = 4x^2 + 10x + 36$

  El primer término es el cuadrado de 2x y el tercer término es el cuadrado de 6. Por lo tanto a = 2x y b = 6.

  Ahora debemos ver si el segundo término (2.a.b) es igual a 10x:

  2.a.b = 2.2x.6 = 24x (que es distinto de 10x). Por lo tanto el polinomio Q(x) no es un trinomio cuadrado perfecto, o sea que no lo podemos factorizar utilizando este caso de factoreo.

12) Determinar si los siguientes polinomios son trinomios cuadrados perfectos. En caso de que sí lo sean, escribirlos como cuadrados de un binomio:

a. $L(x) = 4x^2 + 4x + 1$	d. $O(x) = 25x^6 + 20x^3 + 4$
b. $M(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$	e. $Ñ(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}$
c. $N(x) = x^2 + x + 1$	f. $P(x) = 4x^6 + 8x^3 + 4$

4° Caso de factoreo: Cuatrinomio Cubo Perfecto: Cuando se trabajó potenciación de polinomios se vio el cubo de un binomio: $\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3}$

Para que un polinomio sea un *cuatrinomio cubo perfecto*, tenga la siguiente estructura: $a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$.

- Ejemplo 1:

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Este término es el cubo de **x** ya que $(x)^3 = x^3$

Este término es el cubo de **2** ya que $2^3 = 8$

$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3}$

Para que sea el cubo de un binomio **"$3.x^2.2$"** debe ser igual a **$6x^2$** y "**$3.x.2^2$**" debe ser igual a **12x**. Multiplicando **$2.x^2.2$** obtenemos efectivamente **$6x^2$**, y multiplicando **$3.x.2^2$** obtenemos efectivamente **12x**; por lo tanto, podemos afirmar que el polinomio es un cuatrinomio cubo perfecto.

Por último, podemos afirmar que: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = \mathbf{(x + 2)^3}$ y ya nos queda el polinomio factorizado.

- Ejemplo 2:

$P(x) = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

Este término es el cubo de **3x** ya que $(3x)^3 = 27x^3$

Este término es el cubo de **-2** ya que $(-2)^3 = -8$

$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3}$

Para que sea el cubo de un binomio **"$3.(3x)^2.(-2)$"** debe ser igual a **$-54x^2$** y "**$3.3x.(-2)^2$**" debe ser igual a **36x**.
Multiplicando **$2.(3x)^2.(-3) = 2.9x^2.(-3)$** obtenemos efectivamente **$-54x^2$**;
Multiplicando **$3.3x.(-2)^2 = 3.3x.4$** obtenemos efectivamente **36x**;
por lo tanto, podemos afirmar que el polinomio es un cuatrinomio cubo perfecto.

Por último, podemos afirmar que: $P(x) = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = \mathbf{(3x - 8)^3}$ y ya nos queda el polinomio factorizado.

13) Determinar si los siguientes polinomios son cuatrinomios cubos perfectos. En caso de que sí lo sean, escribirlos como el cubo de un binomio:

a. $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$	d. $T(x) = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$
b. $R(x) = 8x^3 + 6x^2 + 12x + 1$	e. $U(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
c. $S(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$	f. $V(x) = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

5° Caso de factoreo: Diferencia de cuadrados: Para factorizar un polinomio por este método, el polinomio debe tener sólo dos términos, y cada uno de ellos debe ser el cuadrado de algún número o variable. Además, los dos términos deben estar separados por el "signo menos".

De forma general se puede escribir: $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)}$.

- Ejemplo 1: $P(x) = x^2 - 4$

Este término es el cuadrado de **x** ya que $(x)^2 = x^2$

Este término es el cuadrado de **2** ya que $2^2 = 4$

Entonces se puede escribir el polinomio $P(x) = x^2 - 4$ como: $\mathbf{P(x) = (x + 2).(x - 2)}$

- Ejemplo 2: $Q(x) = 9x^2 - 1$

Este término es el cuadrado de **3x** ya que $(3x)^2 = 9x^2$

Este término es el cuadrado de **1** ya que $1^2 = 1$

Entonces se puede escribir el polinomio $Q(x) = 9x^2 - 1$ como: $\mathbf{Q(x) = (3x + 1).(3x - 1)}$

14) Factorizar los siguientes polinomios utilizando "diferencia de cuadrados":

a. $Q(x) = x^2 - 121$
b. $R(x) = 4x^2 - 64$
c. $S(x) = 16x^2 - 36$
d. $T(x) = 81x^2 - 100$
e. $U(x) = x^4 - 1$
f. $V(x) = 25x^6 - 144$

6° Caso de factoreo: Suma o resta de potencias de igual exponente: Para factorizar un polinomio por este método, el polinomio debe tener sólo dos términos (sumados o restados) y los dos términos deben ser potencias del mismo exponente.

Por lo tanto, el polinomio debe ser de la forma: $\mathbf{P(x) = x^k \pm b^k}$

Para poder factorizar un polinomio de esta forma hay que dividirlo utilizando la Regla de Ruffini. El binomio por el cual vamos a dividir a P(x) surge según el siguiente análisis:

Cuando **k** es un número impar
- Si el signo es "menos" dividimos al polinomio por **x – b**
- Si el signo es "mas" dividimos al polinomio por **x + b**

Cuando **k** es un número par
- Si el signo es "menos" dividimos al polinomio por **(x - b)** o por **(x+b)**
- Si el signo es "mas" <u>no podemos dividir al polinomio por nada</u>, porque el polinomio es primo, o sea que no tiene raíces reales.

Ejemplo 1: $\mathbf{P(x) = x^3 + 8}$

Esta es una potencia de exponente 3, ya que $(x)^3 = x^3$

Esta también es una potencia de exponente 3, ya que $(2)^3 = 8$

Por lo tanto estamos ante una ***suma de potencias de igual exponente***, en donde el valor de k es impar, el signo es "mas" y b = 2. Así que vamos a utilizar la regla de Ruffini y vamos a dividir al polinomio P(x) por el binomio: **x + 2.**

Hay que completar el polinomio P(x):

$(x^3 + 0x^2 + 0x + 8) : (x + 2)$

	1	0	0	8
-2	↓	-2	4	-8
	1	-2	4	0

El resto de la división siempre tiene que dar cero.

El cociente de la división es: $x^2 - 2x + 4$.

Entonces, el polinomio factorizado puede escribirse como: **$P(x) = (x + 2).(x^2 – 2x + 4)$**

Lo que hay que tratar de hacer ahora es hallar las raíces del trinomio $x^2 – 2x + 4$. Para ello podemos utilizar la **fórmula de la resolvente**: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

Como a = 1; b = -2 y c = 4:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.4}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{-12}}{6}$$

Esta raíz cuadrada no tiene solución, por lo tanto el polinomio $x^2 – 2x + 4$ no tiene raíces reales.

Finalmente **$P(x) = (x + 2).(x^2 – 2x + 4)$ queda factorizado de esta forma, como un polinomio expresado como producto de un polinomio de primer grado por un polinomio de segundo grado sin raíces reales.**

Ejemplo 2: **$Q(x) = x^3 - 64$**

Esta es una potencia de exponente 3, ya que $(x)^3 = x^3$

Esta también es una potencia de exponente 3, ya que $(4)^3 = 64$

Por lo tanto estamos ante una ***resta de potencias de igual exponente***, en donde el valor de k es impar, el signo es "menos" y b = 4. Así que vamos a utilizar la regla de Ruffini y vamos a dividir al polinomio Q(x) por el binomio: **x - 4.**

Hay que completar el polinomio Q(x):

$(x^3 + 0x^2 + 0x - 64) : (x - 4)$

	1	0	0	-64
4	↓	4	16	64
	1	4	16	0

El resto de la división dio cero, como corresponde.

El cociente de la división es: $x^2 + 4x + 16$.

Entonces, el polinomio factorizado puede escribirse como: **$Q(x) = (x - 4).(x^2 + 4x + 16)$**

Lo que hay que tratar de hacer ahora es hallar las raíces del trinomio $x^2 + 4x + 16$. Para ello podemos utilizar la **fórmula de la resolvente**: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

Como a = 1; b = 4 y c = 16:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.16}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-64}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-48}}{2}$$

Esta raíz cuadrada no tiene solución, por lo tanto el polinomio $x^2 + 4x + 16$ no tiene raíces reales.

Finalmente **$Q(x) = (x - 4).(x^2 + 4x + 16)$ queda factorizado de esta forma, como un polinomio expresado como producto de un polinomio de primer grado por un polinomio de segundo grado sin raíces reales.**

15) Factorizar los siguientes polinomios utilizando el sexto caso de factoreo:

a. $W(x) = x^3 + 1$
b. $X(x) = x^5 + 32$
c. $Z(x) = x^3 – 1/64$
d. $U(x) = x^4 – 16$
e. $Y(x) = x^4 - 1$
f. $V(x) = x^6 – 64$

Actividades generales

16) Factorizar los siguientes polinomios combinando sucesivamente los casos de factoreo que sean necesarios:

a. $12x^2 - 3$
b. $5x^7 - 80x^3$
c. $5x^4 + 30x^3 + 45x^2$
d. $32x^6 - 128x^4$
e. $x^4 - 8x^2 + 16$
f. $x^6 - 1$
g. $2x^3 - 8x + 5x^2 - 20$
h. $3x^3 - 3$
i. $x^4 - 2x^3 + 2x - 4$
j. $5x^3 + 5$
k. $3x^2 + 12x + 12$
l. $3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$
m. $x^4 - 2x^3 + x^2$

Expresiones algebraicas racionales

Definición: Dados dos polinomios P(x) y Q(x), tal que Q(x) sea distinto de cero, se denomina *expresión algebraica racional* a toda expresión de la forma:

$$\frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}} \qquad \text{con } Q(x) \neq 0$$

Ejemplo: $\frac{x+2}{x-x^2} = \frac{x+2}{x.(1-x)}$ $\qquad \forall x : x \neq 0 \wedge x \neq 1$

Una expresión algebraica es ***irreducible*** si no existen en ella factores comunes al numerador y al denominador.

a) $\frac{x}{x-3}$ $\qquad \forall x : x \neq 3$

b) $\frac{x^2+x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{x.(x+1)}{x.(x^2 - 2x - 3)} = \frac{x.(x+1)}{x.(x+1).(x-3)}$ $\qquad \forall x : x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 3$

La expresión ***a)*** es una expresión algebraica ***irreducible***, mientras que la expresión ***b)*** es una expresión algebraica ***reducible***, ya que existen factores comunes en el numerador y el denominador.

Simplificación de expresiones algebraicas racionales

Para *simplificar* una expresión algebraica racional se debe factorizar el numerador y denominador, y cancelar los factores comunes en ambos; de esta manera se obtiene una *expresión irreducible equivalente a la original.*

Ejemplo 1: Utilizando la expresión *b)* del ejercicio anterior:

$$\frac{x^2+x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{x.(x+1)}{x.(x^2 - 2x - 3)} = \frac{x.(x+1)}{x.(x+1).(x-3)} = \frac{\cancel{x.(x+1)}}{\cancel{x.(x+1)}.(x-3)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x-3)}} \qquad \forall x : x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 3$$

Ejemplo 2:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{(x-1).(x-2)}{(x-1).(x+1).(x-2)} = \frac{1}{(x+1)} \qquad \forall x : x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2$$

Actividades

17) Simplificar las siguientes expresiones algebraicas racionales y determinar el dominio de definición.

a. $\dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$

b. $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

c. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6}$

d. $\dfrac{5x^2 - 5}{2x + 2}$

e. $\dfrac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

f. $\dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{x + 1}{x^2 + x} \cdot \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

g. $\dfrac{x^2 - 4}{x^4 - 16} : \dfrac{x^2+4x+4}{x + 2}$

h. $\dfrac{5x + 25}{14} \cdot \dfrac{7x+7}{10x + 50}$

i. $\dfrac{x - 1}{3} : \dfrac{2x - 2}{6}$

j. $\dfrac{x^3 - x}{2x^2 + 6x} : \dfrac{5x^2 - 5x}{2x + 6}$

k. $\dfrac{m+n}{mn-n^2} \cdot \dfrac{n^2}{m^2 - n^2}$

l. $\dfrac{3x^4 - 27x^2}{2x^3-6x^2 + 5x - 15} \cdot \dfrac{2x^2 + 5}{x^2+6x + 9} \cdot \dfrac{x^2-2x-15}{3x^2-15x}$

m. $\dfrac{x^3 + 8}{x^2 + 4x + 4} \cdot \dfrac{5x^3 - 20x}{x^2-2x + 4} \cdot \dfrac{2x}{10x^2-20x}$

n. $\dfrac{x^2-2x-35}{6x^2} \cdot \dfrac{3x^4 - 75x^2}{2x^3 + 3x - 14x^2 - 21} \cdot \dfrac{4x^2 + 6}{x^2 + 10x+25}$

18) Factorizar y resolver las siguientes ecuaciones racionales, determinando previamente el dominio de definición.

19)

a. $\dfrac{x + 2}{x - 2} - \dfrac{x + 6}{x} = 2$

b. $\dfrac{x + 7}{x + 5} - \dfrac{x + 3}{x + 2} = 0$

c. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x^2-4} = 0$

d. $\dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{1}{x-1} = 0$

e. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{x - 13}{6} = 1$

f. $\dfrac{3}{x^2 - 1} + \dfrac{x + 2}{x - 1} = \dfrac{x}{x + 1}$

g. $\dfrac{x + 2}{x + 3} + \dfrac{3}{x^2 + 6x + 9} = 1$

h. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2} - \dfrac{x + 2}{x} = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

i. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{5x - 2}{x} = 5$

j. $\dfrac{x + 5}{x -3} + \dfrac{x + 8}{x-1} = 13$

Unidad N° 5: Funciones

Para analizar fenómenos físicos, los científicos construyen modelos matemáticos que se representan, en muchos casos, mediante *funciones*. Fenómenos estudiados por químicos, agrónomos, economistas, etc., pueden expresarse mediante modelos funcionales. Las funciones son una herramienta fundamental en la tarea de la investigación científica.

Concepto: Una *función f definida de A en B,* que son conjuntos de números reales, es una regla que asigna a cada elemento de *A* (llamado *dominio*) uno y solo un elemento de B (llamado *imagen de x por f*). En símbolos se escribe:

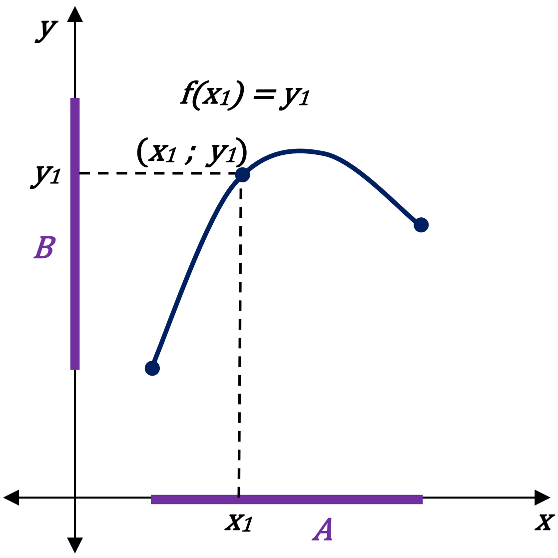
$$f : A \rightarrow B \,/\, y = f(x)$$

Donde *x* representa un elementos de *A* e *y* un elemento de *B.*

La expresión *y = f(x)*, se lee *"f de x es y"* e indica que *y* se obtiene por la aplicación de *f* sobre *x*. La variable *independiente* es *x* y la variable *dependiente* es *y*.

Es decir que para que una relación de un conjunto *A* en otro *B* sea función, debe cumplir dos condiciones a saber:

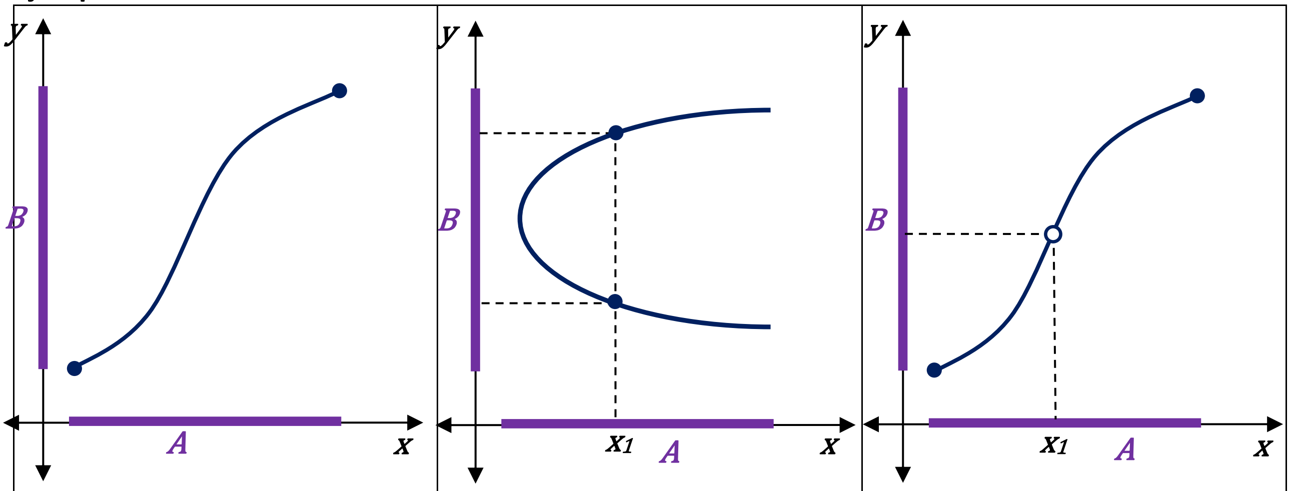
1) Todo elemento del conjunto de partida *A* debe tener *imagen*.
2) La imagen de cada elemento del conjunto *A* deber ser única. Es decir, ningún elemento del *dominio* puede tener más de una *imagen*.



La gráfica de la función es el conjunto de todos los puntos del tipo (*x ; f(x)*).

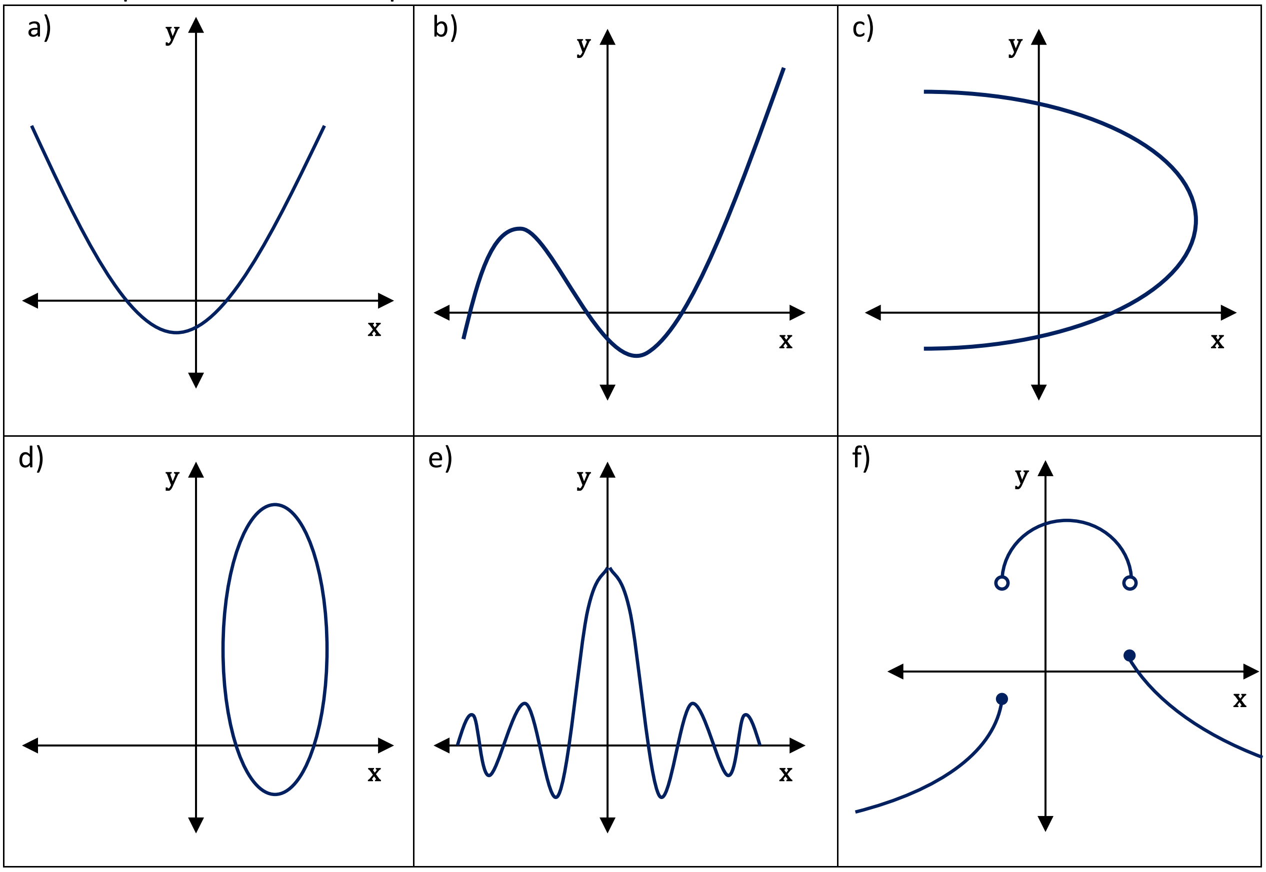
En la gráfica se observa que $f(x_1) = y_1$. Se dice que y_1 *es imagen de* x_1, o bien que x_1 *es preimagen de* y_1.

Ejemplos:



Es función de *A* en *B*.	No es función de *A* en *B*. El elemento x_1 tiene 2 imágenes.	No es función de *A* en *B*. El elemento x_1 no tiene imagen.

1) Indicar cuál o cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Justificar su respuesta en los casos que no lo sean.



2) Consideren las funciones $f(x) = 2x - 5$; $g(x) = 3 - 4x$; $h(x) = x^2 - 3$; $j(x) = 2^x$; $k(x) = x^3 - 5$. Hallen, cuando sea posible, los valores de x o de y para que las siguientes igualdades sean verdaderas:

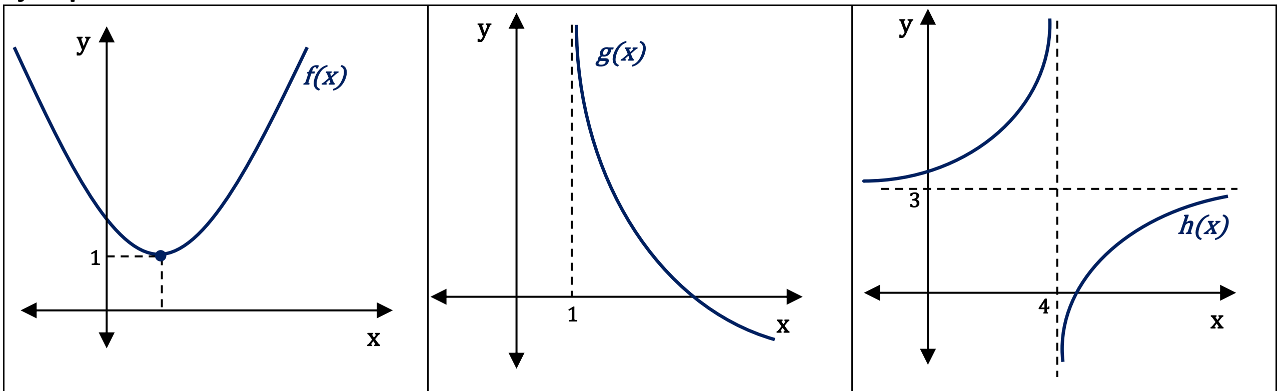
a) $f(-4) = y$	d) $g(x) = 19$	g) $h(x) = -1$	j) $j(x) = -4$
b) $k(2) = y$	e) $h(x) = 1$	h) $g(2) = y$	k) $j(5) = y$
c) $f(x) = -2$	f) $g(0) = y$	i) $j\left(\frac{3}{2}\right) = y$	l) $k(x) = -1$

Dominio e imagen de una función

Cuando consideramos la función *f : A → B*, el conjunto *A* de todos os valores de la variable independiente para los que existe un valor de la variable dependiente se llama *dominio* de la función *(Dom f)*.

El conjunto *imagen* de una función *(Im f)* es el conjunto de todas las *y* que se generan al aplicar la función *f* a todos los elementos *x* del *dominio*.

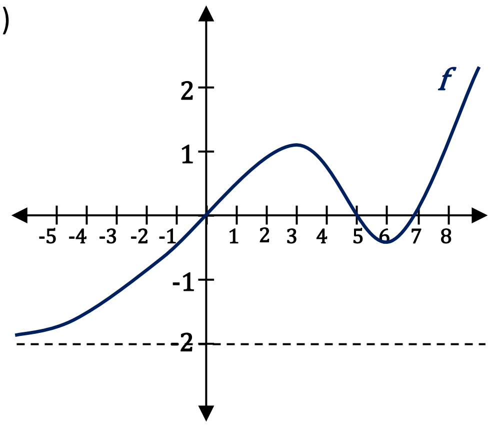
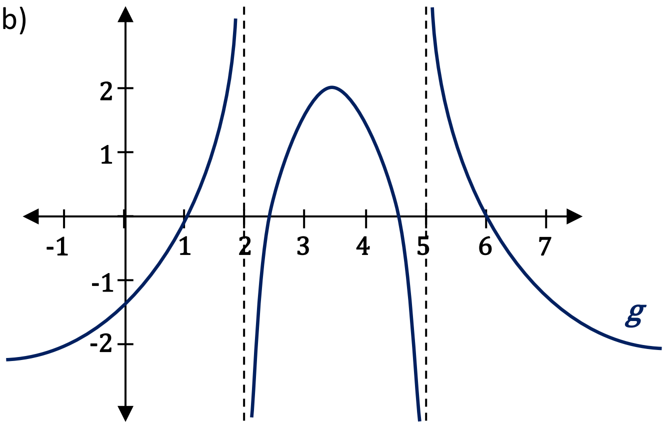
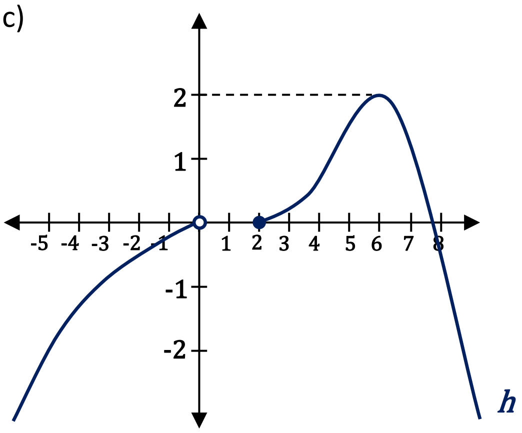
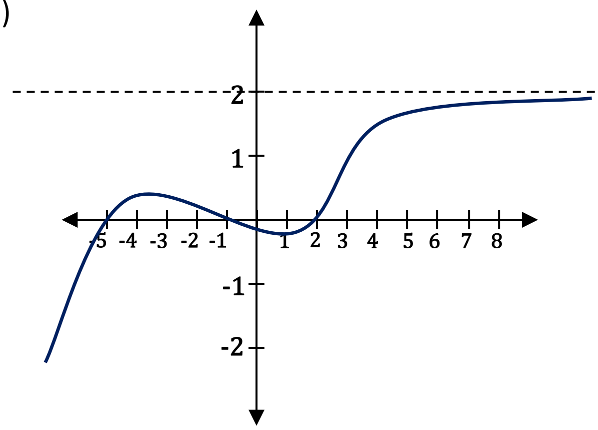
Ejemplos:



Dom *f* : $\mathbb{R}$	**Dom *g* : (1 ; + ∞)**	**Dom *h* : $\mathbb{R}$ - {4}**
Im *f* : [1 ; + ∞)	**Im *g* : $\mathbb{R}$**	**Im *g* : $\mathbb{R}$ - {3}**

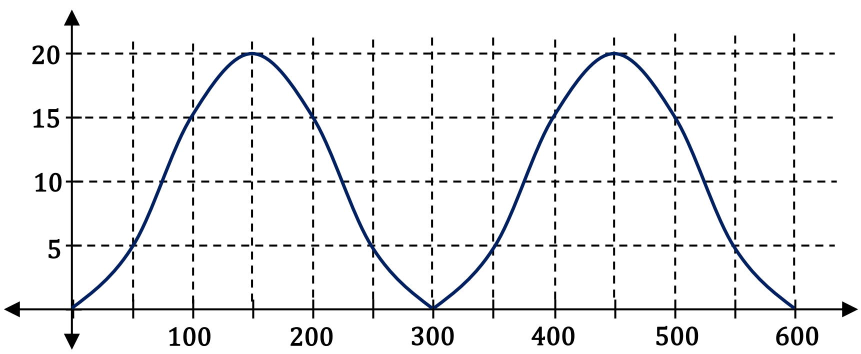
Actividades

3) Observar los gráficos e indicar dominio e imagen:

a) 	b) 
Dom f: ***Im f:***	***Dom g:*** ***Im g:***
c) 	d) 
Do/m h: ***Im h:***	***Dom i:*** ***Im i:***

4) Una *función de demanda* es aquella que relaciona el precio de un producto con la cantidad demandada.
Sobre la base de estudios de mercado, una consultora determina que la demanda de un nuevo cereal se puede describir con la función: $f(x) = (x - 10).(-9/20)$, donde x es el precio de una caja en \$ y $f(x)$ son las toneladas de cereal que se demandarían a ese precio.
   a. Construir un gráfico para la función $f(x)$.
   b. Indicar el dominio y la imagen de $f(x)$ en el contexto de este problema.

5) En un parque de diversiones, un chico va subido en el asiento de una "vuelta al mundo". Una vuelta completa dura 5 minutos. Se considera la función *f* que, para cada instante (medido en segundos), da la altura del asiento al piso (medida en metros), durante dos vueltas completas. Su gráfica se muestra aquí:



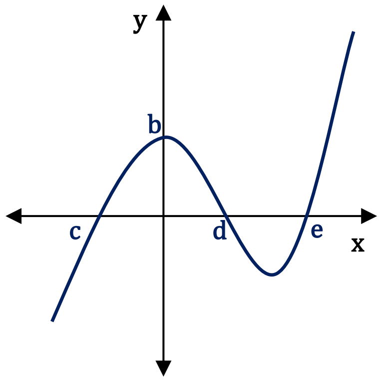
a. ¿Qué altura alcanza el asiento a los 100 seg?
b. ¿En qué instante alcanza una altura de 10m? ¿Y de 20m?
c. ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Y la imagen?
d. ¿Es 25m la imagen para algún instante? ¿Por qué?

Ceros y ordenada al origen. Conjuntos de positividad y negatividad

Una función tiene un *cero en x = a* si y sólo si *f(a)* = 0. En la gráfica, los ceros son los valores que toma la variable *x*, en los puntos de contacto de la función con el eje *x*.

Una función tiene *ordenada al origen b* si y sólo si *f(0)* = *b*. En la gráfica, la ordenada al origen es el valor que toma la variable *y* en el punto de intersección de la función con el eje *y*.

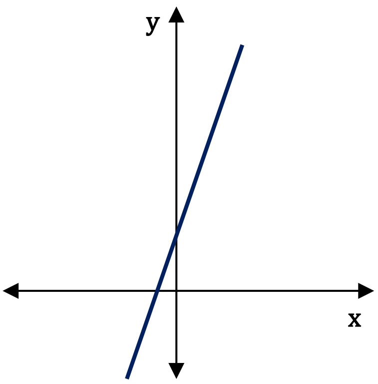
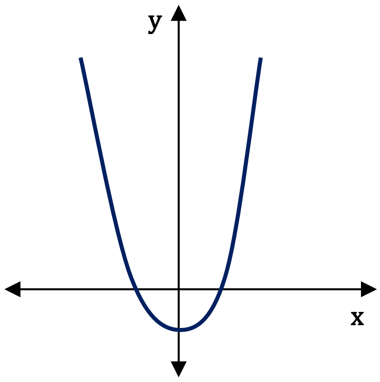
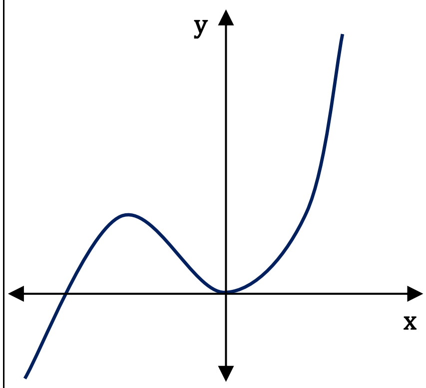
Llamamos *conjunto de positividad* (C^+) al conjunto de valores del dominio para los cuales las imágenes son positivas y *conjunto de negatividad* (C^-) al conjunto de valores del dominio para los cuales las imágenes son negativas.



c, d y e son los ceros.
b es la ordenada al origen.
$C^+ = (c\,;\,d) \cup (e\,;\,+\infty)$
$C^- = (-\infty\,;\,c) \cup (d\,;\,e)$

Actividades

6) Hallar los ceros y la ordenada al origen de las siguientes funciones e indicar los conjuntos de positividad y de negatividad cada una de ellas:

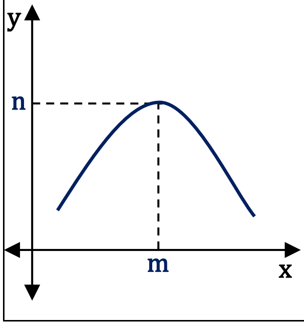
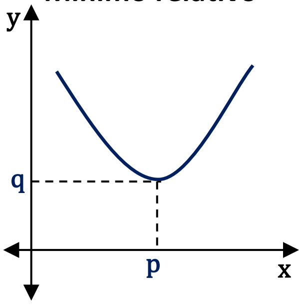
a) *f(x)* = 2x + 1	b) *f(x)* = x^2 - 1	c) *f(x)* = $x^3 + 3x^2$
		

7) Indicar los ceros y los conjuntos de positividad y negatividad del ejercicio 1.a; 1.c y 1.d de la página anterior.

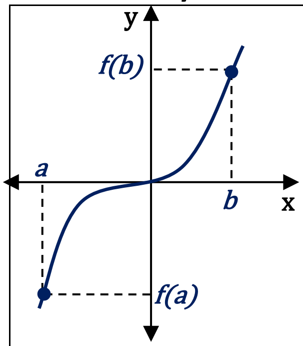
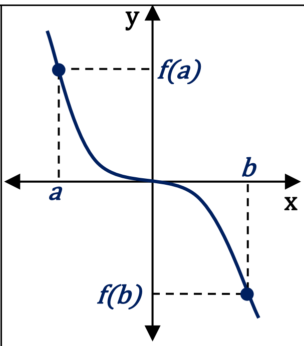
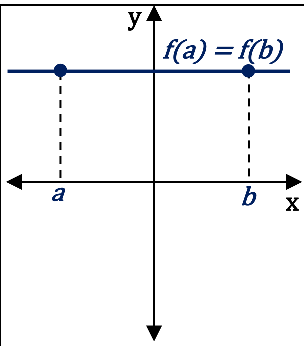
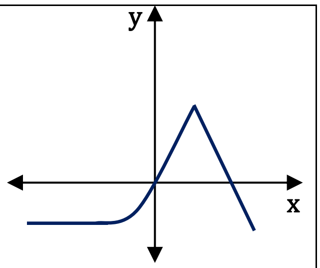
8) Para fabricar una pieza de automóvil se tiene un costo fijo mensual de $3500, debido a sueldos y a gastos de mantenimiento de maquinarias. Además, el material para cada pieza cuesta $10. La pieza se vende a los mayoristas a un precio de $15 cada una. En los meses anteriores no se pudieron ubicar en el mercado más de 1200 piezas mensuales, y se decidió no fabricar más de esa cantidad esta vez.

a. Buscar una expresión para las funciones costo *c(x)* e ingreso *i(x)* durante el mes, en función de la cantidad *x* de piezas fabricadas o vendidas.
b. ¿Cuál es el dominio de las funciones que se obtuvieron en el punto anterior?
c. Si la cantidad de piezas vendidas es igual a la cantidad de piezas fabricadas, la función beneficio *b(x)* se obtiene calculando la diferencia entre ingresos y costos. Hallar una fórmula para expresar el beneficio en función de las unidades vendidas.
d. Hallar los ceros, los conjuntos de positividad y de negatividad de la función beneficio y analizar qué significado tienen para el fabricante.

Máximos y mínimos. Crecimiento y decrecimiento

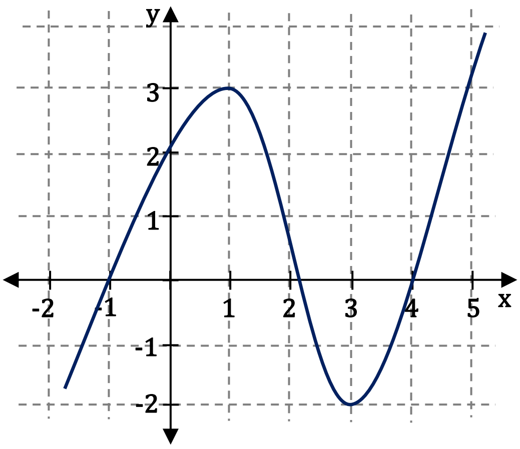
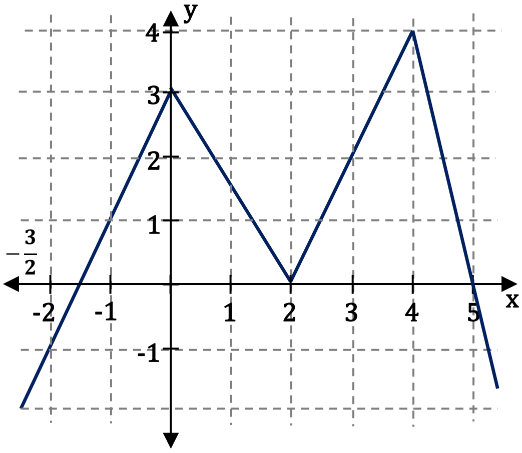
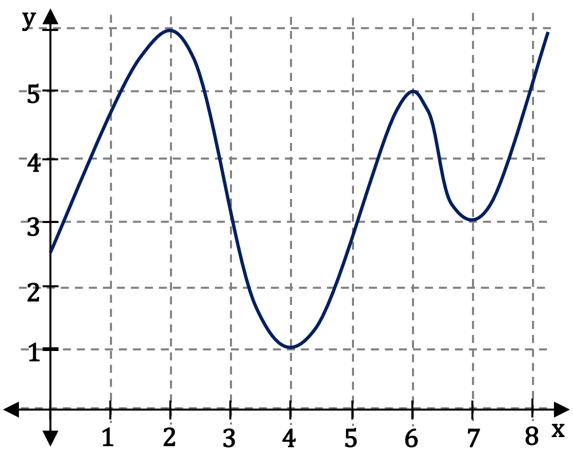
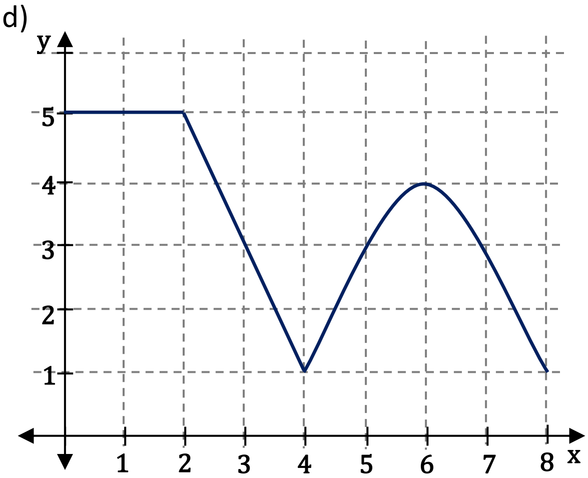
Máximo relativo	Mínimo relativo
 Decimos que ***f(m) = n*** es un máximo relativo de ***f*** porque ***f(x) < f(m)*** para valores de ***x*** "próximos" a ***m***.	 Decimos que ***f(p) = q*** es un mínimo relativo de ***f*** porque ***f(x) > f(p)*** para valores de ***x*** "próximos" a ***p***.

Crecimiento y decrecimiento

 ***f*** **es creciente.** ***a < b ⇒ f(a) < f(b)***	 ***f*** **es decreciente.** ***a < b ⇒ f(a) > f(b)***	 ***f*** **es constante.** ***a < b ⇒ f(a) = f(b)***	 **Una función puede ser creciente, decreciente y constante en distintos intervalos.**

Actividades

9) Indicar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento de las siguientes funciones:

a) 	b) 
c) 	d) 

Funciones polinómicas

Llamamos *función polinómica* a toda función cuya expresión sea de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

(a_n; a_{n-1}; a_{n-2};…; a_1; a_0) son números reales.

Para construir la gráfica aproximada de una función polinómica es conveniente factorizar la fórmula (cuando esto sea posible), es decir, expresarla en la forma:
$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$. [$x_1$; x_2; … x_n son las raíces reales de f(x)], y tener en cuenta lo siguiente:

- **El dominio es $\mathbb{R}$ y es continua.**
- **La ordenada al origen *f(0)* es el término independiente, a_0.**
- **La curva tiene contacto con el eje x en los puntos en los que x = r, donde r es cada raíz real del polinomio. Si la multiplicidad de r es *impar*, la curva "atraviesa" el eje x; si la multiplicidad es *par*, la curva "rebota" sin atravesarlo. (Recordemos que la multiplicidad de una raíz x_k es la cantidad de veces que el factor $(x - x_k)$ aparece en la expresión factorizada.**

Ejemplo: Graficar aproximadamente la función ***f(x)* = $-2x^3 + 6x + 4$.**
Ahora vamos a factorizar la función. Podemos sacar factor común -2 y nos queda:
f(x) = $-2.(x^3 - 3x - 2)$

Luego, podemos dividir el polinomio que quedó entre paréntesis por (x – 2) utilizando la regla de Ruffini:

	1	0	-3	-2
2	↓	2	4	2
	1	2	1	0

Por lo tanto: $(x^3 - 3x - 2) = (x - 2).(x^2 + 2x + 1)$, entonces la función queda expresada de la siguiente manera: *f(x)* = $-2.(x - 2).(x^2 + 2x + 1)$.

Finalmente vamos a tratar de factorizar la expresión cuadrática utilizando la fórmula de la resolvente: Tenemos $x^2 + 2x + 1$, por lo tanto: a = 1; b = 2 y c = 1.

$X_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,.\,1\,.\,1}}{2\,.\,1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$, o sea $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$.

Por lo tanto, *f(x)* = $-2.(x - 2).(x + 1).(x + 1)$, que es lo mismo que escribir lo siguiente:

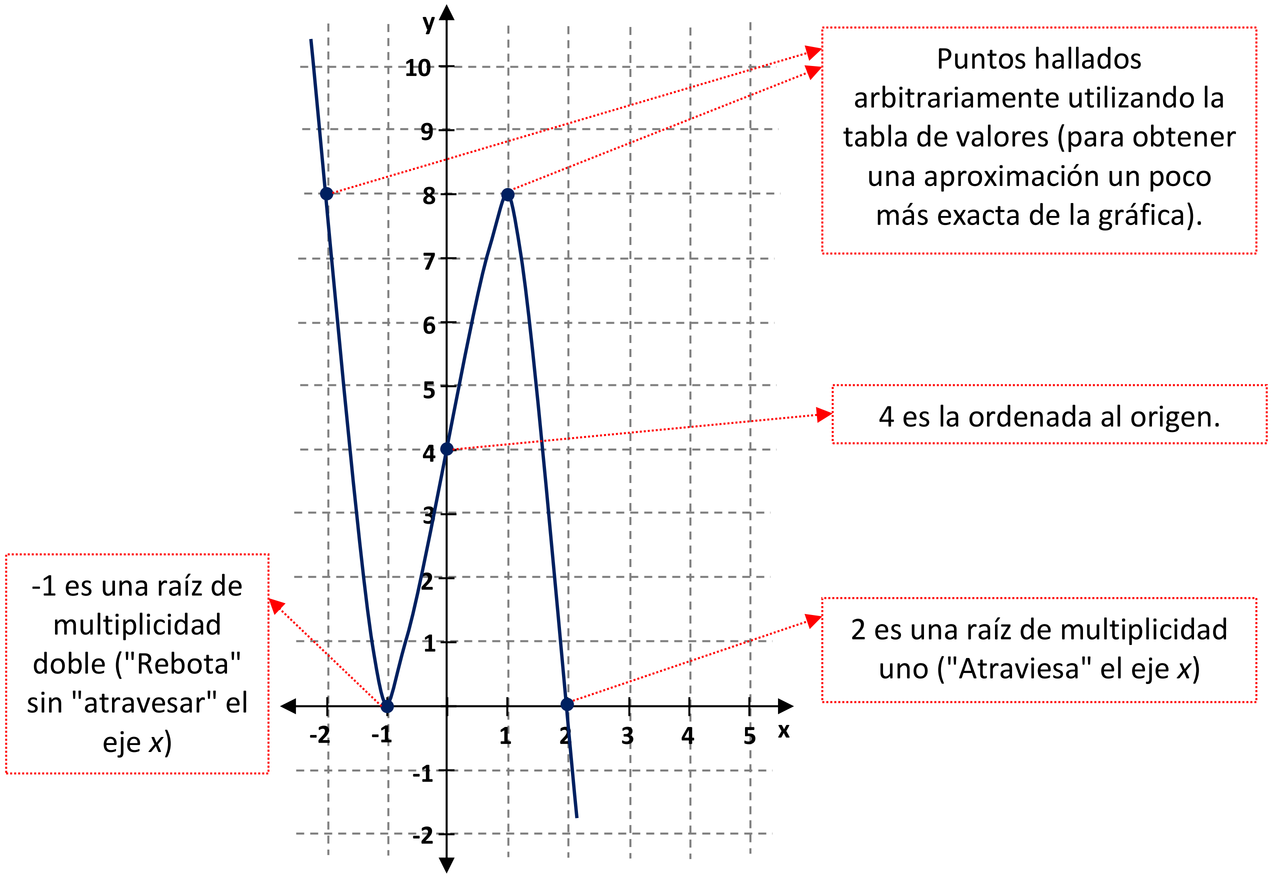
$$f(x) = -2.(x - 2).(x + 1)^2$$

Ya tenemos la función factorizada, ahora podemos llegar a las siguientes deducciones:

- El primer dato que obtenemos observando la ecuación inicial de la función es que la ordenada al origen es 4, ya que el término independiente es 4. Por lo tanto la función va a cortar al eje *y* en *y* = 4.
- Por otro lado vemos que las raíces de esta función son -1 con multiplicidad doble (multiplicidad par) y 2 con multiplicidad uno (multiplicidad impar).
  Teniendo en cuenta la teoría, si la multiplicidad es *impar*, la curva "atraviesa" el eje x; si la multiplicidad es *par*, la curva "rebota" sin atravesarlo.
- Podemos dar algunos valores arbitrarios "cercanos a los valores de las raíces" para tener una mejor aproximación de la gráfica. Por ejemplo, damos los siguientes valores:

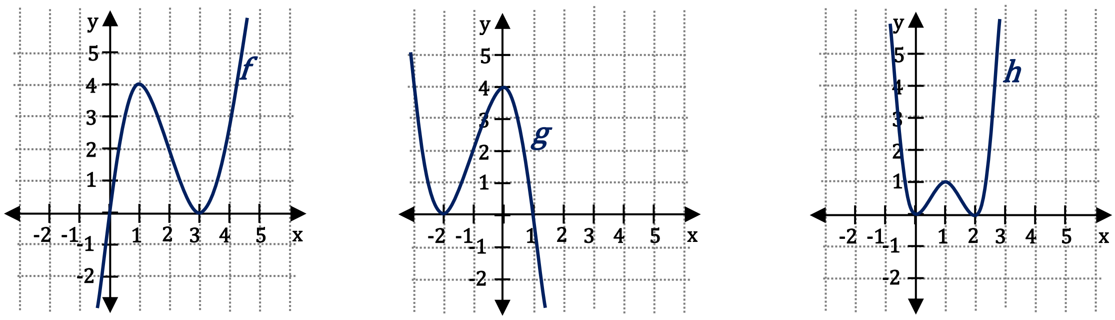
x	Y
-2	$-2.(-2)^3 + 6.(-2) + 4 = 8$
1	$-2.(1)^3 + 6.1 + 4 = 8$

Ya estamos en condiciones de graficar aproximadamente la función:



Actividades

10) Teniendo en cuenta el gráfico de la función anterior, indicar: dominio, imagen, raíces (o ceros), conjunto de positividad, conjunto de negatividad, crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimo.
11) Graficar aproximadamente las siguientes funciones polinómicas:
    a. $f(x) = x^3 – 7x – 6$.
    b. $g(x) = x^3 – 4x^2 + 4x$.
    c. $h(x) = x^3 + 2x^2 - 9x – 18$.
    d. $i(x) = x^3$.
    e. $j(x) = x^4 - 4x^2$.
    f. $k(x) = x^3 – x$.
    g. $l(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.
    h. $m(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
    i. $n(x) = 2x^2 – 8x + 6$.
    j. $o(x) = x^3 + 3x^2 - 4x – 12$.
    k. $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x – 2$.
    l. $q(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$.
12) Indicar: dominio, imagen, raíces (o ceros), conjunto de positividad y conjunto de negatividad en todas las funciones del punto 2.
13) Observar las siguientes gráficas:



a. Identificar cuáles de las siguientes fórmulas corresponden a las funciones *f*, *g*, y *h*.
   I. $x^2(x - 2)^2$
   II. $x^2(x – 3)$
   III. $–(x + 2)^2(x – 1)$
   IV. $x(x – 3)^2$
   V. $(x + 2)^2(x – 1)$
   VI. $x^2(x + 2)^2$
b. Indicar los conjuntos de positividad y negatividad de cada una de las funciones.

Funciones homográficas

Llamamos *función homográfica* a una función de la forma:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ , con a, b, c y d reales; } c \neq 0 \text{ y } ad \neq bc$$

La función está definida para todo número *x* real excepto para aquel que anula el denominador (el denominador no puede ser igual a 0).

Su gráfica es una curva llamada *hipérbola*.

Ejemplo: $f(x) = \frac{6x+24}{2x+4}$

Dominio: Lo primero que debemos determinar es el dominio de *f(x)*. El único número real que no pertenece al dominio es el que anula el denominador (el denominador no puede ser 0), entonces $2x + 4 \neq 0$, por lo que $x \neq -2$.

Así que: **Dom f:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

Raíz: Para hallar la raíz igualamos la función a 0:

$\frac{6x+24}{2x+4} = 0$ para que una expresión de este tipo sea 0, debe ser 0 el numerador, por lo tanto, resolvemos: $6x + 24 = 0 \Rightarrow x = -4$. Por lo tanto la **raíz es -4.**

Corte con el eje *y*: El corte con el eje *y* se determina calculando *f(0)* y es el punto (0 ; *f(0)*):

$f(0) = \frac{6.0+24}{2.0+4} = \frac{24}{4} = 6.$ O sea que **el corte con el eje *y* es el punto: (0 ; 6).**

Asíntotas: Las asíntotas son rectas a las que la gráfica de la función se "acerca indefinidamente".

La **asíntota vertical** es una recta de la forma: $x = -\frac{d}{c}$. La función no está definida para el número real –d/c (esto se ve cuando se determina el dominio) pero sí para valores "muy cercanos" a él. En este caso, **la asíntota vertical es x = -2**.

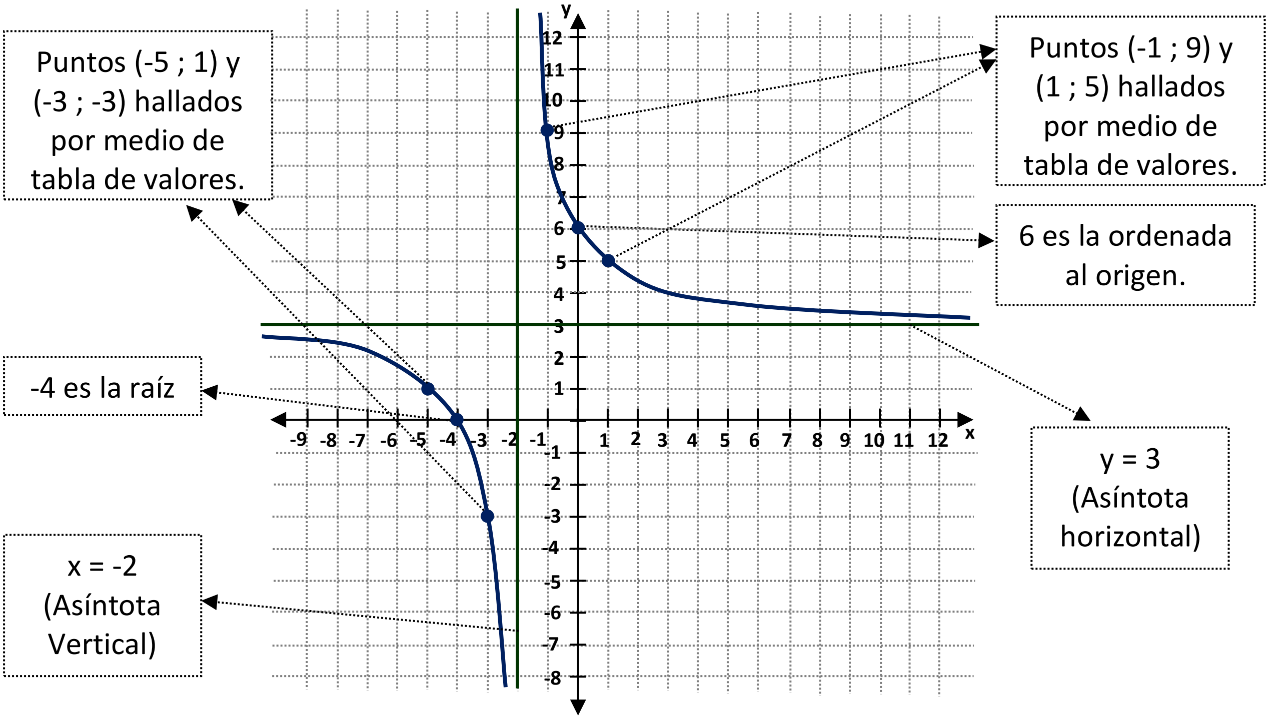
La **asíntota horizontal** es la recta a la cual se acerca el gráfico de *f* cuando $x \to \pm \infty$.

En general el gráfico se acercará a la recta $y = \frac{a}{c}$. En este caso, **la asíntota horizontal es y = 3.**

Finalmente, y para poder determinar con mejor precisión el recorrido de la gráfica, podemos calcular algunos puntos de la función para algunos valores arbitrarios de *x* cercanos a la raíz (que en este caso es -4) y a la asíntota vertical (que en este caso es x = - 2).

X	Y
-5	$f(-5) = \frac{6.(-5)+24}{2.(-5)+4} = \frac{-6}{-6} = 1.$
-3	$f(-3) = \frac{6.(-3)+24}{2.(-3)+4} = \frac{6}{-2} = -3.$
1	$f(1) = \frac{6.1+24}{2.1+4} = \frac{30}{6} = 5.$
-1	$f(-1) = \frac{6.(-1)+24}{2.(-1)+4} = \frac{18}{2} = 9.$

Ya estamos en condiciones de graficar aproximadamente la función:



Actividades

14) Indicar: imagen, conjunto de positividad y conjunto de negatividad e intervalos de crecimiento y decrecimiento en la función del ejemplo anterior.

15) Hallar dominio, corte con el eje *y* , raíz y asíntotas y graficar aproximadamente las siguientes funciones homográficas:

a. $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$

b. $g(x) = \frac{3x-6}{x+2}$

c. $h(x) = \frac{-x+4}{x+1}$

d. $i(x) = \frac{3x+2}{4x+8}$

e. $j(x) = \frac{2x-6}{-x-3}$

f. $k(x) = \frac{-2x+4}{x+1}$

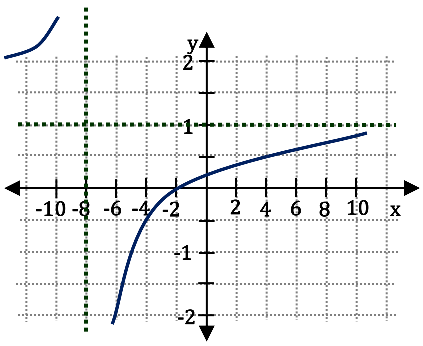
16) Indicar: imagen, conjunto de positividad y conjunto de negatividad e intervalos de crecimiento y decrecimiento en las funciones del ejercicio 2.

17) Hallar la fórmula de:
   a. Una función homográfica decreciente con asíntota vertical en x = 1 y asíntota horizontal en y = -2.
   b. Una función homográfica creciente cuya raíz es 4 y corte al eje y en -2.

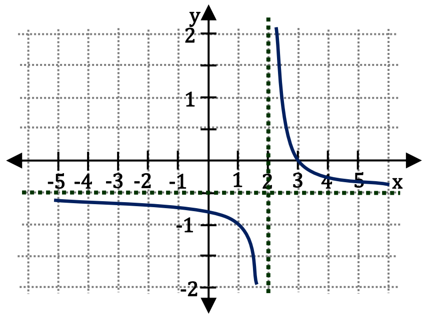
18) Graficar las funciones halladas en el punto 17.a y 17.b en indicar en ambos casos: dominio, imagen, raíz, corte con el eje *y*, conjunto de positividad y conjunto de negatividad e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

19) Encontrar las fórmulas de las funciones representadas en los siguientes gráficos:

a.



b.



Unidad N° 6: Ecuaciones y Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Ecuaciones Logarítmicas

Son ecuaciones logarítmicas aquellas en las que aparece la incógnita o incógnitas dentro de un logaritmo.

Ejemplo 1. Esta ecuación se resuelve simplemente aplicando la definición de logaritmo:

$\text{Log}_3 (2x + 1) = 2$

$2x + 1 = 3^2$

$2x + 1 = 9$

$2x = 8$

$\mathbf{x = 4}$

Ejemplo 2: Esta ecuación se resuelve aplicando alguna propiedad de los logaritmos y obteniendo una ecuación de la forma log (….) = log (….)

$\log x + \log 5 = \log 100$

$\log (x.5) = \log 100$

$x.5 = 100$

$x = 100/5$

$\mathbf{x = 20}$

Actividades

1) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:
   a) $\log_5 (6x - 2) = 1$
   b) $\log_{25} x = 2$
   c) $\log_2 4x = 1$
   d) $\log\ (100 + 2x) = 2$
   e) $\log_3 (6x + 15) = 4$
   f) $\log x = \log 24 – \log 8$
   g) $\log x – \log (22 – x) = 1$
   h) $\log x - \log (x – 3) = 1$
   i) $\log x + \log 50 = \log 100$
   j) $2.\log x – 4.\log 2 = 3.\ \log 3$

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son aquellas que tienen la incógnita en el exponente

Ejemplo 1: $8^x = 32$

Podemos buscar una relación entre las bases de las potencias:

$8^x = 32 \Rightarrow (2^3)^x = 2^5 \Rightarrow 2^{3x} = 2^5 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Ejemplo 2: $a^{3x-2} = 1$

Hay que recordar que 1 es igual a cualquier número elevado al exponente cero

$$a^{3x-2} = 1$$
$$a^{3x-2} = a^0$$
$$3x – 2 = 0$$
$$3x = 2$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 3: $5^x = 2$

Cuando las bases no son iguales se debe aplicar logaritmo decimal o natural a ambos lados de la igualdad. El logaritmo aplicado debe ser de igual base en ambos miembros de la igualdad.

$$\ln 5^x = \ln 2$$
$$x.\ \ln 5 = \ln 2$$
$$x = \ln 2 / \ln 5$$
$$x = 0{,}430676558$$

Ejemplo 4: $3^{2x - 5} = 7^{4 - 5x}$

$$3^{2x-5} = 7^{4-5x}$$
$$\ln(3^{2x-5}) = \ln(7^{4-5x})$$
$$(2x - 5).\ln 3 = (4 - 5x).\ln 7$$
$$2x.\ln 3 - 5.\ln 3 = 4.\ln 7 - 5x.\ln 7$$
$$2x.\ln 3 - 5x.\ln 7 = 4.\ln 7 + 5.\ln 3$$
$$x.(2.\ln 3 + 5.\ln 7) = 4.\ln 7 + 5.\ln 3$$
$$x = \frac{4.\ln 7+5.\ln 3}{2.\ln 3+5.\ln 7}$$
$$x = 1{,}113184552$$

Actividades

2) Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{3x-2} = 81$

b) $2^{x+5} = 8^{x-1}$

c) $5^{3x+1} = 25^{x-5}$

d) $3^{2x-3} = 27^{\frac{x+1}{3}}$

e) $2^{x-2} = 3^{3x+1}$

f) $7^{x^2-3x+2} = 1$

g) $4^{x^2-11x+30} = 16$

h) $5^{x^2-5x+6} = 1$

Actividades generales

3) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a. $\log_2(7x-1) - \log_2(3x+5) = 1$
b. $\log(2) + \log(5x+3) = 2.\log(4)$
c. $\log(x+1) - \log(x-1) = \log(2)$
d. $\log(700x+300) - \log(6x+5) = 2$
e. $\log(2x-8) + \log(4) = 4.\log(2)$
f. $\log(5x+3) - \log(2x-1) = \log(3)$
g. $\log_2(x-1) + \log_2(3x+1) = 6$
h. $\log(x-2) + \log(x+3) = \log(6)$
i. $\log_6(x-1) + \log_6(5x+1) = 3$
j. $\log(x+1) + \log(x-2) = 1$
k. $\log(x+1) = 2.\log(x-1)$

4) Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a. $2^{2x-1} = 4$
b. $3^{x+1} - 2 = 25$
c. $7^{x+3} - 2 = -1$
d. $3^{2x-1} = 3$
e. $8^{x+1} = 2^{2x+7}$
f. $2^{2x+1} = 8$
g. $3^{6x+4} = 9^{x-6}$
h. $2^{10x-6} = 16^{2x-5}$
i. $5^{3x+9} = 125^{2x+1}$
j. $5^{x^2+2x-3} = 25^{5x+3}$
k. $3^{x^2+5x-10} = 81$
l. $2^{3x^2+4x-13} = 4^{x^2+3x+1}$
m. $7^{2x} = 5$
n. $6^{3x} = 2$
o. $3^{2x+3} = 2^{x+1}$
p. $5^{2x-6} = 4^{x}$

Funciones exponenciales

Llamamos *función exponencial* a toda función cuya expresión sea de la forma:

$$f(x) = k \cdot a^x + b \quad (k \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{R};\ a > 0;\ a \neq 1)$$

Características:

- **El dominio son todos los números reales: *Dom f:* $\mathbb{R}$.**
- **Si $a > 1$ la función es *creciente* y si $0 < a < 1$ es *decreciente*.**
- **La recta de ecuación y = b es la *asíntota horizontal*.**

Ejemplo 1:

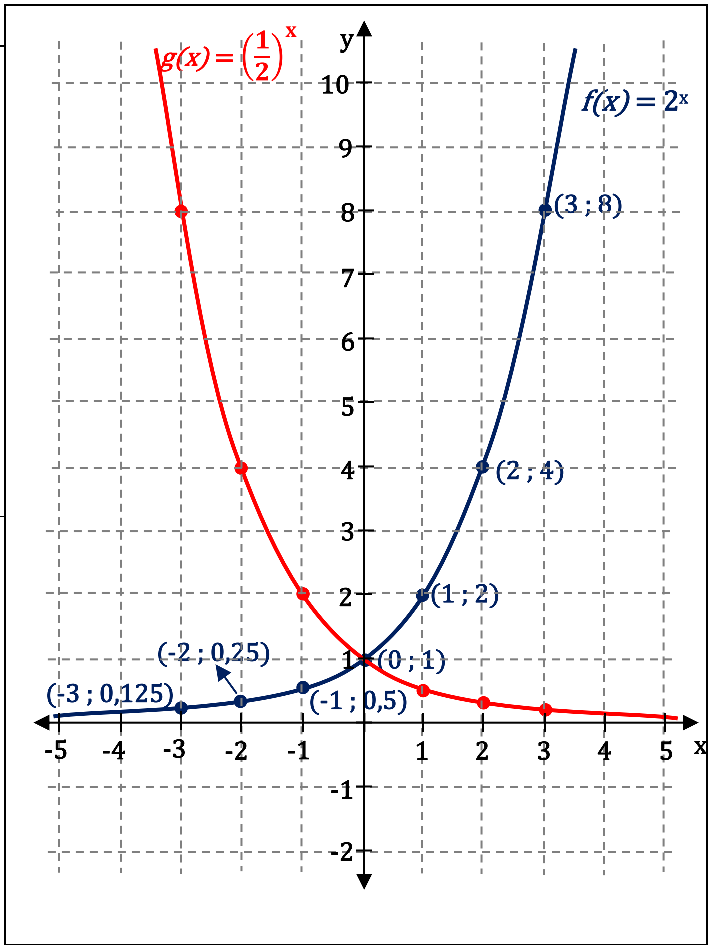
***f(x)* = 2^x**

X	Y
-3	$f(-3) = 2^{-3} = (1/2)^3 = 1/8 = 0{,}125$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = (1/2)^2 = 1/4 = 0{,}25$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = (1/2)^1 = 1/2 = 0{,}50$
0	$f(0) = 2^0 = 1$
1	$f(1) = 2^1 = 2$
2	$f(2) = 2^2 = 4$
3	$f(3) = 2^3 = 8$

Ejemplo 2:

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

X	Y
-3	$f(-3) = (1/2)^{-3} = 2^3 = 8$
-2	$f(-2) = (1/2)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$f(-1) = (1/2)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$f(0) = (1/2)^0 = 1$
1	$f(1) = (1/2)^1 = 1/2 = 0{,}50$
2	$f(2) = (1/2)^2 = ¼ = 0{,}25$
3	$f(3) = (1/2)^3 = 1/8 = 0{,}125$



Actividades

5) Establecer: dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, máximos, mínimos, ceros, ordenada al origen y asíntotas de los dos ejemplos anteriores.
6) ¿Cuál es el valor de ***a, b*** y de ***k*** en las dos funciones de los ejemplos anteriores?
7) En una función exponencial del tipo ***f(x)* = *k* . *a*^{x}**, ¿cuál es la imagen de x = 0?
8) Graficar y analizar las siguientes funciones exponenciales:
   - a. $f(x) = 3^x$
   - b. $g(x) = 2.3^x + 1$
   - c. $h(x) = 2^{x+2}$
   - d. $i(x) = -2.\ 3^x + 2$
   - e. $j(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
   - f. $k(x) = 2^x + 3$
   - g. $l(x) = 2^{x-1} + 3$
   - h. $m(x) = e^x$
   - i. $n(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
   - j. $o(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2$
9) El crecimiento de un cultivo de bacterias es tal que a cada hora se duplica el número de las mismas. En estas condiciones si había 1000 bacterias al iniciar el experimento.
   - a. ¿Cuántas bacterias habrá luego de una hora? ¿Y luego de tres horas?
   - b. Hallar la ecuación de una función exponencial que permita hallar la cantidad de bacterias luego de ***x*** horas.

Crecimiento o decrecimiento exponencial

El crecimiento o decrecimiento exponencial se suele utilizar en el lenguaje ordinario, sin tener, en muchos casos, una idea clara de su significado matemático, para describir situaciones como las siguientes:

- ¡Si la población mundial aumenta de forma exponencial, en unos años las grandes ciudades serán incapaces de absorber el crecimiento demográfico!
- ¡Si las reservas de agua decrecen de forma exponencial, en un breve lapso de tiempo no podremos disponer de agua potable para el consumo humano!
- ¡Existe la opinión generalizada de que mientras la población aumenta de forma exponencial, los alimentos lo hacen de forma lineal! ¿Qué ocurrirá en el futuro si esto es cierto?

Aunque son muchas las situaciones que describen un crecimiento exponencial, está íntimamente ligado al crecimiento de las poblaciones (ya sean de personas, animales, bacterias, árboles, ...) en las que el crecimiento de la población depende del número de individuos que la componen.

El crecimiento exponencial también está ligado problemas relacionados con el interés producido por un capital y con situaciones de desintegración radiactiva.

Ejemplo: Una población crece a un ritmo del 2% anual. Estudia la expresión que relaciona el número habitantes con el tiempo transcurrido.

- Supongamos una población de N habitantes. Por lo tanto, Inicialmente hay N habitantes.
- Al cabo de un año habrá:

  N + 2% de N. O sea que: $N + \frac{2}{100} . N = N + 0{,}02.N = N.(1+ 0{,}02) = \mathbf{1{,}02 . N}$
- Al cabo de dos años habrá:

  $1{,}02N + 2\%$ de $1{,}02N = 1{,}02.N + \frac{2}{100}.(1{,}02.N) = 1{,}02.N + 0{,}02.(1{,}02.N) = 1{,}02.N(1+0{,}02) = 1{,}02.N.1{,}02 = 1{,}02.1{,}02.N = \mathbf{1{,}02^2.N}$

Para los años sucesivos formamos la siguiente tabla:

Tiempo transcurrido	**Población**
0	**N**
1	$N + 2\%N = N + 0{,}02.N = (1+0{,}02)N = \mathbf{1{,}02.N}$
2	$1{,}02.N + 2\%(1{,}02N) = 1{,}02.N + 0{,}02.1{,}02.N = 1{,}02.N.(1+0{,}02) = \mathbf{1{,}02^2.N}$
3	$1{,}02^2.N + 2\%(1{,}02^2.N) = 1{,}02^2.N + 0{,}02.(1{,}02^2.N) = 1{,}02^2.N.(1+0{,}02). = \mathbf{1{,}02^3.N}$
...	...
10	$\mathbf{1{,}02^{10} .N}$
...	...
X	$\mathbf{1{,}02^x.N}$

Actividades

10) Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, si una ciudad tiene hoy una población de 23500 habitantes y crece a un ritmo del 2% anual.
    a. ¿Cuántos habitantes tendrá en un año?
    b. ¿Cuántos habitantes tendrá en tres años?
    c. Hallar la ecuación de la función exponencial que exprese la población de la ciudad en función de la cantidad de años transcurridos.

11) Según estimaciones recientes de las Naciones Unidas, la población de la ciudad de Bombay (India) tenía en 1950 una población de 2,9 millones de habitantes y fue creciendo a razón de un 40% por década.

a. ¿Qué población tuvo en 1960? ¿Y en 1990?
b. Según este modelo, la proyección para el año 2020 es de ………………. millones de habitantes.
c. Hallar la ecuación de la función exponencial que representa esta situación y graficarla aproximadamente.

12) En un pueblo se pudo establecer que el crecimiento anual de la población es del 4,5 %.

a. Si actualmente tiene 2500 habitantes, ¿cuántos tendrá dentro de 5 años?
b. Si se mantiene esta tasa de crecimiento, ¿en cuánto tiempo el pueblo contará con 4000 habitantes?

13) Al nacer Juan, su padre depositó $3.000 al 12% de interés anual. Si no retira el dinero ni los intereses:

a. ¿Qué capital tendrá al año? ¿Y a los dos años?
b. ¿Qué capital tendrá cuando cumpla 18 años?
c. ¿Cuál es la función exponencial que permite calcular el capital obtenido para ***x*** años?
d. Hacer un gráfico aproximado de la función encontrada en el punto c.

14) Si un monto de dinero se deposita en una cuenta a una tasa de interés simple:

a. ¿Cuánto dinero se obtiene si se depositan $1000 al 0,4 % mensual simple durante un año?
b. Obtengan la función que les permite calcular el monto en función del tiempo. ¿Es creciente?

15) Supongamos que un coche que hoy cuesta $100 mil se deprecia de tal forma que cada año que pasa, el valor es el 95% de su valor anterior

a. ¿Cuál será el valor del auto luego de dos años?
b. ¿Luego de 3 años?
c. ¿Cuál será el valor del auto luego de 18 meses?
d. Hallar la ecuación de una función que represente el valor del automóvil luego de x años. ¿Cuál es el valor de ***k***? ¿Cuál es el valor de ***a***?

16) Se sabe que la superficie cubierta por una planta acuática en un lago se duplica cada día. Si en el momento de empezar el estudio la planta ocupa una superficie de 1 m^2.

a. Hacer una tabla que exprese este crecimiento.
b. Hallar la función que relaciona las variables número de días y superficie ocupada.
c. Representar dicha función y hallar: dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, máximos, mínimos, ceros, ordenada al origen y asíntotas.

17) Una persona deposita en un banco $1000 en un plazo fijo que paga el 0,4 % de interés mensual.

a. Al terminar el mes, ¿cuánto ganó de intereses? Si retira el monto, es decir, el dinero depositado inicialmente más los intereses ganados, ¿cuánto dinero retira?
b. Si resuelve depositar por un mes más el dinero y los intereses ganados, ¿cuál será el monto obtenido al cabo del segundo mes?
c. Si a fin de cada mes deposita el total acumulado, ¿cuál será el monto si retira el dinero a los ***x*** meses? Intenten encontrar una fórmula en la cual sólo haya que reemplazar ***x*** para tener el monto acumulado.
d. Otra persona deposita, en ese mismo banco, $2000. Analicen cómo se modifica la respuesta a cada una de las preguntas anteriores en ese caso.
e. A la entrada del banco, a la segunda persona le dieron un folleto en el que decía que otra entidad daba el 5% anual a los ahorristas que dejaran el dinero por un año. Esta nueva opción, ¿le conviene más o no? Expliquen por qué.

Funciones logarítmicas

Llamamos *función logarítmica* a toda función cuya expresión sea de la forma:

$$f(x) = \log_a x + b \quad (a > 0;\ a \neq 1)$$

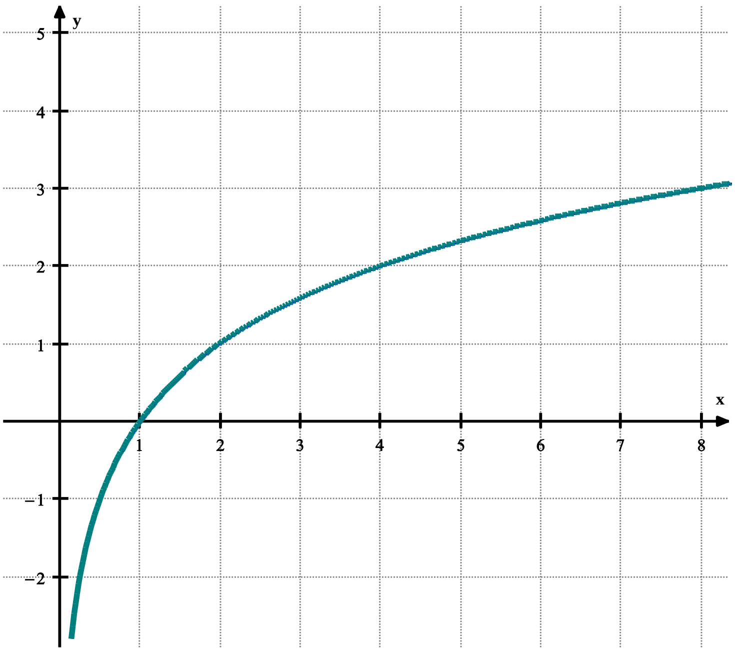
Características:

- **La imagen son todos los números reales.**
- **Si $a > 1$ la función es *creciente* y si $0 < a < 1$ es *decreciente*.**

Ejemplo 1:

$f(x) = \log_2 x$

X	Y
1/8	$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8} = -3$
1/4	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2$
1/2	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$
1	$f(1) = \log_2 1 = 0$
2	$f(2) = \log_2 2 = 1$
4	$f(4) = \log_2 4 = 2$
8	$f(8) = \log_2 8 = 3$



En la función del gráfico anterior, indicar:

Dominio:

Imagen:

Crecimiento:

Decrecimiento:

Positividad (C^+):

Negatividad (C^-):

Ceros (C^0):

Ordenada Al Origen:

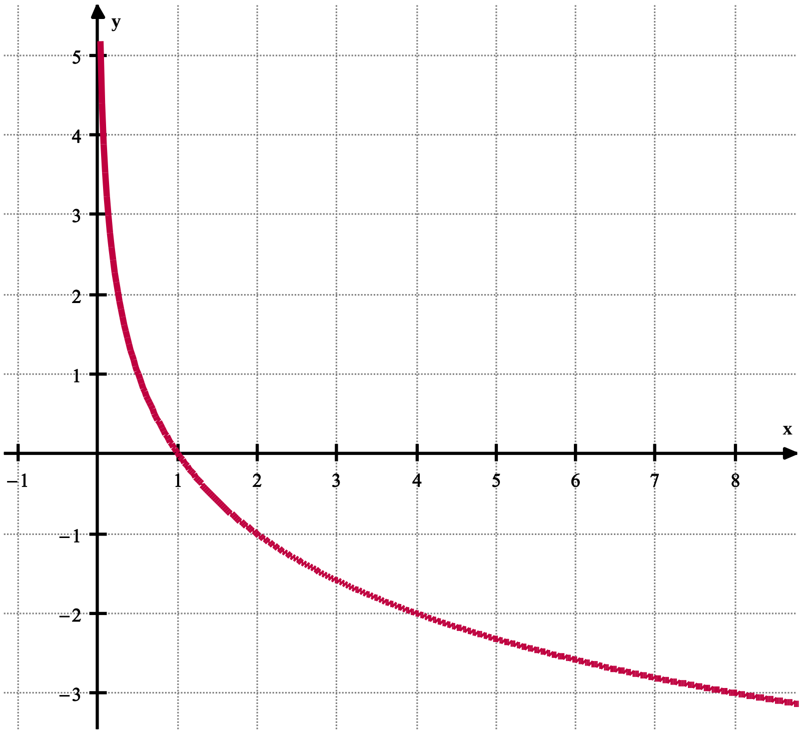
Máximos:

Mínimos:

Ejemplo 2:

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

X	Y
1/8	$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$
1/4	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$
1/2	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$
1	$f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
2	$f(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
4	$f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$
8	$f(8) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$



Actividades

19) En la función del gráfico anterior, indicar:

Dominio:
Imagen:
Crecimiento:
Decrecimiento:
Positividad (C^+):
Negatividad (C^-):
Ceros (C^0):
Ordenada Al Origen:
Máximos:
Mínimos:

20) Graficar aproximadamente y analizar las siguientes funciones logarítmicas:

a. f(x) = $\log_3 x$
b. f(x) = $\log_{\frac{1}{3}} x$
c. f(x) = $\log_{\frac{1}{4}} x$
d. *f(x)* = $\log_3 x + 3$
e. *f(x)* = $\log_2 x - 1$
f. *f(x)* = $-2.\log_3 x$
g. *f(x)* = $\log_{\frac{2}{3}} x$
h. *f(x)* = $\log_{\frac{1}{2}} x + 2$
i. *f(x)* = $\log_2 x - 4$
j. *f(x)* = $2.\log_{\frac{1}{3}} x - 1$
k. *f(x)* = $-1.\log_4 x$

21) Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

I. *f(x)* = $2 \cdot 2^x$
II. *g(x)* = $\log (x-2)^3$
III. *h(x)* = $\log (1-x)^3$
IV. *k(x)* = $\log \left(\frac{x+3}{2-x}\right)$
V. *j(x)* = $\log_2 x$
VI. *l(x)* = $\log (x+3) - \log (2-x)$
VII. *n(x)* = $3.\log (x-2)$
VIII. *p(x)* = 2^{x+1}
IX. *m(x)* = $\frac{\log x}{\log 2}$
X. *q(x)* = $3.\log (1-x)$

22) Teniendo en cuenta que dos funciones son iguales cuando asignan el mismo valor a cada elemento del dominio, unir con flechas las funciones del ejercicio anterior que sean iguales.

Magnitud de un terremoto

La escala que ha sido desarrollada para medir los terremotos es la Escala de Richter que lleva el nombre del sismólogo americano Charles Richter (1900-1985). La fuerza de un terremoto medida por la escala Richter está dada por la expresión:

$$\mathbf{M = \log\left(\frac{E}{I_0}\right)}$$

Donde **E** es la intensidad de las vibraciones del terremoto medido y $\mathbf{I_0}$ es la intensidad de la unidad de un terremoto estándar. Esta unidad estándar es medida por un instrumento conocido como un sismógrafo, el cual detecta las vibraciones en la corteza terrestre. En efecto, la escala Richter es una medida comparativa, más que una medida absoluta.

Un aumento de 1 en la escala de Richter se corresponde con un incremento de 10 veces en la amplitud de la onda. Es decir, la cantidad de vibración del suelo de un terremoto de escala 7 es 10 veces mayor que uno de escala 6.

Ejemplo: El terremoto ocurrido en los Ángeles en 1971 tuvo una intensidad de $5.10^6.I_0$ ¿Cual fue la magnitud en la escala de Richter?

M = $\log\left(\frac{5.10^6.I_0}{I_0}\right) = \log 5.10^6 = \log 5 + \log 10^6 = 0{,}7 + 6 = 6{,}7$

23) Un terremoto tuvo una intensidad de $3.10^5.I_0$ ¿Cual fue la magnitud en la escala de Richter?

24) ¿Cuál mayor fue la magnitud del terremoto del ejemplo, con el terremoto del ejercicio 4?

Unidad N° 7: Composición De Funciones. Función Inversa

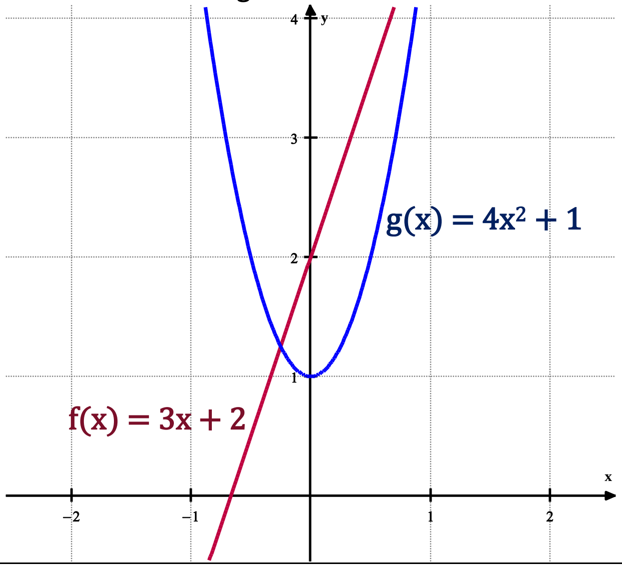
Composición de funciones

Supongamos que f y g son funciones tales que la imagen de g es un subconjunto del dominio de f (Esto quiere decir que la imagen de g esté incluida en el dominio de f). Entonces la función composición de fog, puede ser descrita por la ecuación [fog](x) = f[g(x)].

Ejemplo 1: Supongamos que **f(x)=3x+2** y **g(x)=4x^2 +1** encontrar:

a. [fog](x) (Se lee g compuesta con f).
b. [gof](x) (Se lee f compuesta con g).

Respuestas:

Si observamos un gráfico de las funciones:  	Vemos que: Dom f: $\mathbb{R}$ Dom g: $\mathbb{R}$ Im f: $\mathbb{R}$ Im g: [1 ; + ∞) Según la definición, para poder realizar la composición **[fog](x)**, se tiene que cumplir que la imagen de **g** esté incluida en el dominio de **f**. En este caso se cumple esta condición. Análogamente, para poder realizar la composición **[gof](x)**, se tiene que cumplir que la imagen de **f** esté incluida en el dominio de **g**; y en este caso también se cumple esta condición. Por lo tanto se pueden realizar las dos composiciones pedidas, para lo cuál se precede de la siguiente manera:

a. [fog](x) = f[g(x)] Esto quiere decir que debemos reemplazar la variable **x** de la función **f** por la función **g**:
[fog](x) = 3.**(4x^2 + 1)** + 2 = 12x^2 + 3 + 2 = 12x^2 + 5. Por lo tanto: **[fog](x) = 12x^2 + 5**

Se reemplaza la variable **x** de la función **f** por la función **g.**

b. [gof](x) = g[f(x)] Esto quiere decir que debemos reemplazar la variable **x** de la función **g** por la función **f**:

Se reemplaza la variable **x** de la función **g** por la función **f.**

[gof](x) = 4.**(3x + 2)**^{2} + 1 = 4.(9x^2 + 12x + 4) + 1 = 36x^2 + 48x + 16 + 1. Por lo tanto: **[gof](x) = 36x^2 + 48x + 17**

Actividades

1) Dadas las siguientes funciones: f(x) = 2x – 1; g(x) = 6x^2 + 2; hallar:
   a. [fog](x) y [gof](x)
   b. Calcular [fog](2); [fog](-1); [gof](4) y [gof](-3).
2) Dadas las siguientes funciones: f(x) = x^2; g(x) = x - 3; hallar:
   a. [fog](x) y [gof](x)
   b. Calcular [fog](3); [fog](-2); [gof](4) y [gof](0).
3) Dadas las siguientes funciones: f(x) = -3x + 6; g(x) = x^3 + 1; hallar:
   a. [fog](x) y [gof](x)
   b. Calcular [fog](5); [fog](-3); [gof](2) y [gof](-1).

Función Inversa: f^{-1}

Para garantizar la existencia de la inversa de una función, la función debe ser uno a uno.

Una función con dominio A se conoce como uno a uno, si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, es decir: $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$.

<u>Definición</u>: Sea f una función uno a uno con dominio A e imagen B. Entonces la *función inversa* f^{-1} que tiene por dominio B e imagen A, está definida por: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ para cualquier y en B.

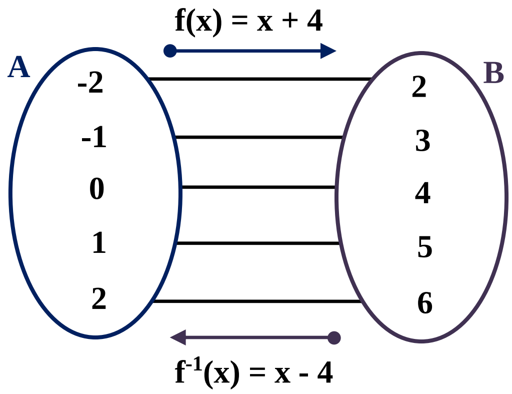
<u>Proceso para hallar la inversa de una función</u>:

1) **Reemplazar f(x) por y.**
2) **Despejar la variable "x", utilizando los métodos algebraicos permitidos.**
3) **Cambiar la variable "x" por "y" e "y" por "x".**
4) **Reemplazar la variable "y" por "$f^{-1}(x)$", y ésta función hallada será la inversa de f.**

Ejemplo: Supongamos que tenemos la función f(x) = x + 4 que es una función uno a uno ya que es lineal y no constante. Para hallar su inversa procedemos según los pasos indicados:

1) Reemplazamos "f(x)" por "y": **y = x + 4**.
2) Despejamos la variable "x": **y – 4 = x** que es lo mismo que escribir: **x = y – 4**.
3) Cambiamos la variable "x" por "y" y la variable "y" por "x": **y = x – 4**.
4) Reemplazamos la variable "y" por "$f^{-1}(x)$": **$f^{-1}(x) = x - 4$.** Este resultado obtenido es la inversa de la función f.

Según la definición de función inversa, si f(x) = y, entonces $f^{-1}(y) = x$. Veamos algunos valores del dominio y la imagen de las funciones f(x) y $f^{-1}(x)$:



- **El dominio de $f^{-1}(x)$ es la imagen de f(x).**
- **La imagen de $f^{-1}(x)$ es el dominio de f(x).**

Si dos funciones f y f^{-1} son inversas, su composición es la función identidad; o sea que: $[f o f^{-1}](x) = x$ y $[f^{-1} o f](x) = x$.

En el ejemplo anterior, f(x) = x + 4 y $f^{-1}(x) = x - 4$ son inversas. Entonces la composición de estas dos funciones debe ser igual a la función identidad:

- $[f o f^{-1}](x) = (x - 4) + 4$; O sea que: **$[f o f^{-1}](x) = x$.**
- $[f^{-1} o f](x) = (x + 4) - 4$; O sea que: **$[f^{-1} o f](x) = x$.**

4) Hallar la inversa de f(x) = 3x – 9, graficar ambas funciones y luego hallar sus respectivas composiciones.
5) Hallar la inversa de f(x) = 2x + 8, graficar ambas funciones y luego hallar sus respectivas composiciones.
6) Hallar la inversa de las siguientes funciones y luego probar que sus composiciones dan la función identidad:

a. $F(x) = 2x + 1$	d. $I(x) = \frac{2x-3}{4}$	g. $L(x) = \frac{x+3}{x-2}$	j. $O(x) = x^3 - 2$
b. $G(x) = \frac{2x+3}{x-1}$	e. $J(x) = -5x + 6$	h. $M(x) = 2x + 5$	k. $P(x) = \frac{x}{2} - 5$
c. $H(x) = 3x$	f. $K(x) = x^3 - 6$	i. $N(x) = \sqrt[3]{x-1}$	l. $Q(x) = 10x^3 + 6$