MATEMÁTICA

Escuela de Educación Secundaria Técnica Nº 1 "Jorge A. Maciel"

San Andrés de Giles

2do Año

Profesor Walter Rosello

Enlaces importantes

Enlace para descargar el cuadernillo de 2do año:

https://matematica-walter9.webnode.page/a2do-ano-es/

Enunciados de problemas históricos de Olimpíada Matemática Ñandú (desde 5to Año EP a 1er año ES):

https://omsag.webnode.com/enunciados-historicos/

Enunciados de problemas históricos de Olimpíada Matemática Argentina (OMA) (desde 2do año ES hasta 7mo año ES):

https://omsag.webnode.com/enunciados-historicos-oma/

Páginas de interés:

https://omsag.webnode.page/

https://oma.org.ar/

http://www.omsag.blogspot.com/

Teoría

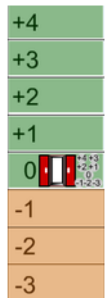
Números Enteros

Los números menores que 0 se llaman números negativos y se los escribe con el signo menos adelante. Los números mayores que 0 se llaman números positivos. El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, los negativos de estos y el 0 y se simboliza con la letra $\mathbb{Z}$.

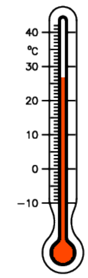
$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

En la mayoría de los programas de noticias de la TV se ve un recuadro en donde, muchas veces aparece escrito ST: -2°C. ¿Qué significa?

En el tablero del ascensor, -2 señala el segundo subsuelo: 2 niveles bajo la planta baja, que es el nivel cero.



En la columna del termómetro, -10 indica 10 grados debajo del cero, que es la temperatura de congelación del agua.



Opuesto de un número

- **El opuesto de n es –n.**
- **Si n es positivo, el opuesto de n es negativo.**
- **Si n es negativo, el opuesto de n es positivo.**

Por ejemplo: El opuesto de 4 es -4 y el opuesto de -8 es 8.

Valor absoluto o módulo de un número

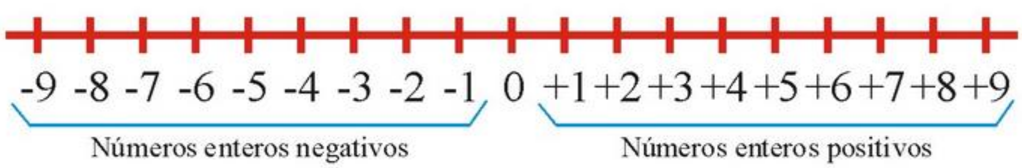
- **El valor absoluto de un número es la distancia del número al cero en la recta numérica.**
- **El valor absoluto de n se indica $|n|$.**

Por ejemplo: $|5| = 5$; $|-3| = 3$; $|99| = 99$; $|-99| = 99$.

- **Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto.**
- **El valor absoluto de un número distinto de cero es siempre positivo.**

Orden y recta numérica

Los números enteros están ordenados en la recta numérica:



- **a es menor que b (a < b) si a está a la izquierda de b en la recta.**
- **a es mayor que b (a > b) si a está a la derecha de b en la recta.**
- **Todos los números positivos son mayores que cero.**
- **Todos los números negativos son menores que cero.**

-4 es menor que -2: $-4 < -2$ -4 está a la izquierda de -2.

3 es mayor que -1: $3 > -1$ 3 está a la derecha de -1.

-1 es mayor que -2: $-1 > -2$ -1 está a la derecha de -2.

Propiedades de la suma de números enteros

Propiedades	Ejemplos
Conmutativa: Si a y b son enteros, $a + b = b + a$	$5 + 3 = 3 + 5 = 8$. $8 + (-2) = -2 + 8 = 6$.
Asociativa: Si a, b y c son enteros, $(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + (-3)) + 10 = -1 + 10 = 9$. $2 + ((-3) + 10) = 2 + 7 = 9$.
Neutro: Si a es entero, $a + 0 = 0 + a = a$.	$8 + 0 = 0 + 8 = 8$. $-6 + 0 = 0 + (-6) = -6$.
Opuesto: Si a es entero, $a + (-a) = -a + a = 0$.	$5 + (-5) = -5 + 5 = 0$.
El opuesto de la suma es la suma de los opuestos: $-(a + b) = -a + (-b)$.	$-(3 + 6)= -3 + (-6) = -3 - 6 = -9$.

Propiedades de la multiplicación de números enteros

Propiedades	Ejemplos
Conmutativa: Si a y b son enteros, $a . b = b . a$	$15 . 2 = 2 . 15 = 30$. $7 . (-2) = -2 . 7 = -14$.
Asociativa: Si a, b y c son enteros, $(a . b) . c = a . (b . c)$	$(2 . (-5)) . 6 = -10 . 6 = -60$. $2 . ((-5) . 6) = 2 . (-30) = -60$.
Neutro: Si a es entero, $a . 1 = 1 . a = a$. **(El producto de un entero por 1 es el mismo entero)**	$9 . 1 = 1 . 9 = 9$. $-16 . 1 = 1 . (-16) = -16$.
Si a es entero, $a . (-1) = -1 . a = -a$. **(El producto de un entero por –1 es el opuesto del entero)**	$15 . (-1) = -1 . 15 = -15$. $-12 . (-1) = -1 . (-12) = +12$.
Si a es entero, $a . 0 = 0 . a = 0$. **(El producto de un entero por cero es cero)**	$25 . 0 = 0 . 25 = 0$. $-13 . 0 = 0 . (-13) = 0$.
Distributiva con respecto de la suma: Si a, b y c son enteros, $a.(b + c) = a.b + a.c$	$6.(1 + 2) = 6.1 + 6.2 = 6+12 = 18$.
Distributiva con respecto de la resta: Si a, b y c son enteros, $a.(b - c) = a.b - a.c$	$5.(3 - 1) = 5.3 - 5.1 = 15 - 5 = 10$.

Propiedades de las potencias

Propiedades	Ejemplos
• **Multiplicación de potencias de igual base: $a^n . a^m = a^{n+m}$.** Se mantiene la base y se suman los exponentes.	$(-2)^5 . (-2)^4 = (-2)^9$. $3^6 . 3 . 3^3 = 3^{10}$.
• **División de potencias de igual base: $a^n : a^m = a^{n-m}$.** Se mantiene la base y se restan los exponentes.	$(-8)^6 : (-8)^4 = (-8)^2$. $\frac{6^5}{6^2} = 6^3$.
• **Potencia de potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.** Se mantiene la base y se multiplican los exponentes.	$(2^3)^5 = 2^{15}$. $[(-4)^2]^6 = (-4)^{12}$.
• **La potencia de un producto es igual al producto de las potencias: $(a . b)^n = a^n . b^n$.**	$(2 . 5)^3 = 2^3 . 5^3$.

Números primos y compuestos

- **Números primos:** son aquellos que sólo admiten dos divisores, el número 1 y a sí mismo.
  Ejemplo: 23 es primo porque es divisible solamente por 1 y por 23.
- **Números compuestos:** son aquellos que admiten más de dos divisores. Ejemplo: el 8 es divisible por 1,2,4,8.
- El número 1 no es ni primo ni compuesto ya que tiene un solo divisor, él mismo.

Números primos entre sí o coprimos

Dos números enteros **a** y **b** son números primos entre sí (o **coprimos**), si no tienen ningún factor primo en común, o, dicho de otra manera, si no tienen otro divisor común más que 1 y -1.
Por ejemplo: Si a = 9 y b = 20. Los divisores de 9 son ±1, ±3 y ±9 y los divisores de 20 son ±1, ±2, ±4, ±5, ±10 y ±20. Como los únicos divisores comunes con ±1, entonces 9 y 20 son **coprimos** o **primos entre sí**.

La Criba de Eratóstenes (276 a. C. – 194 a. C.)

La Criba de Eratóstenes consiste en una tabla con los números del 1 al 100 en donde se eliminan los números que no sean primos y que, por lo tanto, sean múltiplos de algún otro número:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Descomposición de números en factores primos

Todo número puede expresarse como un producto de factores **primos**. Para descomponer un número en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

- Dividir el número por el menor número primo posible.
- Si el resultado puede dividirse nuevamente por ese número, realizar la división.
- Si el resultado no puede volver a dividirse por ese número, buscar el menor número primo posible para continuar dividiendo.
- Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.
  Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & - \end{array}$$

$90 = 2.3^2.5$

Números cuadrados perfectos

Un número es **cuadrado perfecto** cuando resulta ser el resultado de elevar al cuadrado algún número entero. La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es siempre un número entero. Los primeros cuadrados perfectos son:

Cuadrado perfecto	Porque	**Cuadrado perfecto**	Porque	**Cuadrado perfecto**	porque
0	$0^2 = 0$	**9**	$3^2 = 9$	**36**	$6^2 = 36$
1	$1^2 = 1$	**16**	$4^2 = 16$	**49**	$7^2 = 49$
4	$2^2 = 4$	**25**	$5^2 = 25$	**64**	$8^2 = 64$

Cuadrados perfectos: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361…

- Un número **n** es **cuadrado perfecto** si y sólo sí, en su factorización tiene todos exponentes pares. Además, el 1 es cuadrado perfecto.
  Ejemplo: La factorización de 144 es $2^4.3^2$ Como ambos exponentes son pares, entonces 144 es cuadrado perfecto.
- Un número **n** es **cuadrado perfecto** si y sólo sí tiene una cantidad impar de divisores positivos.
  Ejemplo: Los divisores positivos de 64 son: 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 64. Entonces 64 tiene siete divisores positivos. Como siete es impar, entonces 64 es un cuadrado perfecto.

Números cubos perfectos

Un número es un **cubo perfecto** cuando resulta ser el resultado de elevar al cubo algún número entero. La raíz cúbica de un cubo perfecto es siempre un número entero. Los primeros cubos perfectos son:

Cubo perfecto	porque	**Cubo perfecto**	porque	**Cubo perfecto**	porque
0	$0^3 = 0$	**27**	$3^3 = 27$	**216**	$6^3 = 216$
1	$1^3 = 1$	**64**	$4^3 = 64$	**343**	$7^3 = 343$
8	$2^3 = 8$	**125**	$5^3 = 125$	**512**	$8^3 = 512$

Cubos perfectos: 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096,….

Contar cuadrados y cubos perfectos

La **cantidad de cuadrados perfectos** que hay entre 1 inclusive y k es $\left[\sqrt{\mathrm{k}}\right]$, los corchetes indican que se debe tomar solamente la parte entera de $\sqrt{\mathrm{k}}$. Por ejemplo, entre 1 y 58 hay $\left[\sqrt{58}\right]$ = 7 cuadrados perfectos, en efecto, ellos son: 1, 4, 9, 16, 25, 36 y 49.

La **cantidad de cubos perfectos** que hay entre 1 inclusive y k es $\left[\sqrt[3]{\mathrm{k}}\right]$, los corchetes indican que se debe tomar solamente la parte entera de $\sqrt[3]{\mathrm{k}}$. Por ejemplo, entre 1 y 200 hay $\left[\sqrt[3]{200}\right]$ = 5 cubos perfectos, en efecto, ellos son: 1, 8, 27, 64 y 125.

Vamos a suponer que tenemos que contar la cantidad de cuadrados y cubos perfectos que hay entre 1 y 5000.
En ese caso: Cuadrados perfectos: $\left[\sqrt{5000}\right]$ = 70. Cubos perfectos: $\left[\sqrt[3]{5000}\right]$ = 17.
Pero cuidado, porque algunos son cuadrados y cubos perfectos al mismo tiempo. Ellos son las potencias sextas.
Entonces para saber cuántos están repetidos debemos calcular: $\left[\sqrt[6]{5000}\right]$ = 4.
Finalmente, la cantidad de cuadrados y cubos perfectos que hay entre 1 y 5000 inclusive es: 70 + 17 – 4 = 83.

Números Racionales

Propiedades de la suma de números racionales

Propiedades	Ejemplos
Conmutativa: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$	$\frac{2}{5}+\frac{7}{2}=\frac{4+35}{10}=\frac{39}{10}$ $\quad$ $\frac{7}{2}+\frac{2}{5}=\frac{35+4}{10}=\frac{39}{10}$
Asociativa: $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$	$\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right)=\frac{3}{5}+\left(\frac{3+10}{6}\right)=\frac{3}{5}+\frac{13}{6}=\frac{18+65}{30}=\frac{83}{30}.$ $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{3}=\left(\frac{6+5}{10}\right)+\frac{5}{3}=\frac{11}{10}+\frac{5}{3}=\frac{33+50}{30}=\frac{83}{30}.$

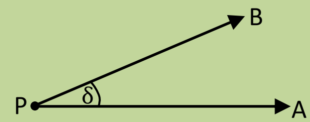
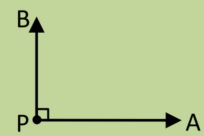
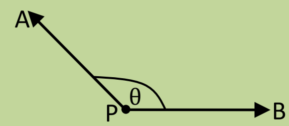
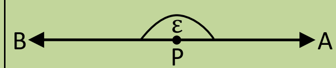
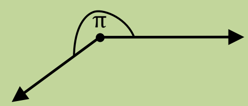
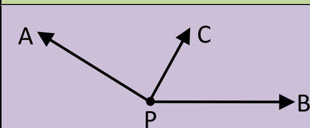
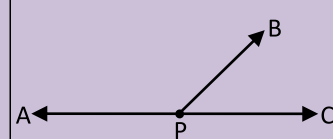
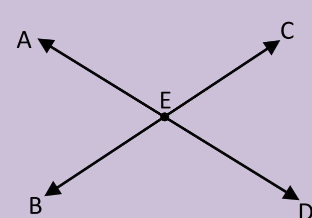
Propiedades de la multiplicación de números racionales

Propiedades	Ejemplos
Conmutativa: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}$	$\frac{3}{4}.\frac{5}{2}=\frac{3.5}{4.2}=\frac{15}{8}$ $\quad$ $\frac{5}{2}.\frac{3}{4}=\frac{5.3}{2.4}=\frac{15}{8}$
Asociativa: $\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}$	$\frac{3}{5}.\left(\frac{1}{2}.\frac{5}{3}\right)=\frac{3}{5}.\left(\frac{1.5}{2.3}\right)=\frac{3}{5}.\frac{5}{6}=\frac{3.5}{5.6}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}.$ $\left(\frac{3}{5}.\frac{1}{2}\right).\frac{5}{3}=\left(\frac{3.1}{5.2}\right).\frac{5}{3}=\frac{3}{10}.\frac{5}{3}=\frac{3.5}{10.3}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}.$
Distributiva con respecto de la suma: $\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$	$\frac{8}{3}.\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{8}{3}.\left(\frac{2+3}{4}\right)=\frac{8}{3}.\frac{5}{4}=\frac{8.5}{3.4}=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}.$ $\frac{8}{3}.\frac{1}{2}+\frac{8}{3}.\frac{3}{4}=\frac{8.1}{3.2}+\frac{8.3}{3.4}=\frac{8}{6}+\frac{24}{12}=\frac{16+24}{12}=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}.$
Distributiva con respecto de la resta: $\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$	$\frac{7}{2}.\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{2}.\left(\frac{6-5}{15}\right)=\frac{7}{2}.\frac{1}{15}=\frac{7.1}{2.15}=\frac{7}{30}.$ $\frac{7}{2}.\frac{2}{5}-\frac{7}{2}.\frac{1}{3}=\frac{7.2}{2.5}-\frac{7.1}{2.3}=\frac{14}{10}-\frac{7}{6}=\frac{42-35}{30}=\frac{7}{30}.$

Propiedades de la potenciación

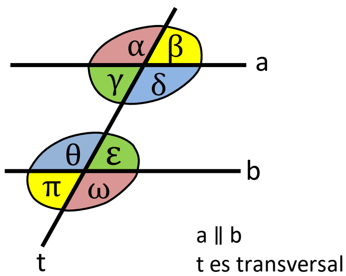
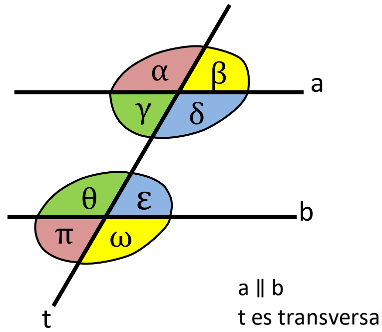
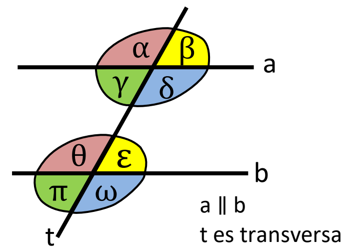
Propiedades	Ejemplos
• **Multiplicación de potencias de igual base:** $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}.\left(\frac{a}{b}\right)^{m}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$ Se mantiene la base y se suman los exponentes.	$\left(\frac{3}{2}\right)^{2}.\left(\frac{3}{2}\right)^{5}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2+5}=\left(\frac{3}{2}\right)^{7}$ $\left(-\frac{1}{5}\right)^{8}.\left(-\frac{1}{5}\right)^{-6}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{8+(-6)}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{2}$
• **División de potencias de igual base:** $\left(\frac{a}{b}\right)^{p}:\left(\frac{a}{b}\right)^{q}=\left(\frac{a}{b}\right)^{p-q}$ Se mantiene la base y se restan los exponentes.	$\left(-\frac{7}{3}\right)^{6}:\left(-\frac{7}{3}\right)^{2}=\left(-\frac{7}{3}\right)^{6-2}=\left(-\frac{7}{3}\right)^{4}$ $\left(\frac{2}{9}\right)^{18}:\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{9}\right)^{18-(-2)}=\left(\frac{2}{9}\right)^{20}$
• **Potencia de potencia:** $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{s}\right]^{t}=\left(\frac{a}{b}\right)^{s.t}$ Se mantiene la base y se multiplican los exponentes.	$\left[\left(\frac{17}{11}\right)^{2}\right]^{6}=\left(\frac{17}{11}\right)^{2.6}=\left(\frac{17}{11}\right)^{12}$
• **La Potenciación es distributiva con respecto de la multiplicación y de la división:** $\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}.\left(\frac{c}{d}\right)^{n}$ $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^{m}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m}:\left(\frac{c}{d}\right)^{m}$	$\left(\frac{3}{5}.\frac{2}{7}\right)^{4}=\left(\frac{3}{5}\right)^{4}.\left(\frac{2}{7}\right)^{4}$ $\left(\frac{8}{3}:\frac{1}{4}\right)^{5}=\left(\frac{8}{3}\right)^{5}:\left(\frac{1}{4}\right)^{5}$

Ángulos

Clasificación	Nombre	Descripción	Gráfico	Representación
Según su abertura	**Nulo**	Si un ángulo mide 0°, entonces es nulo.		$\alpha = 0°$
	Agudo	Su abertura mide más de 0° y menos de 90°.		$0° < \widehat{APB} < 90°$ $0° < \delta < 90°$
	Recto	Su abertura mide 90°.		$\widehat{APB} = 90°$
	Obtuso	Su abertura mide más de 90° y menos de 180°.		$90° < \widehat{APB} < 180°$ $90° < \theta < 180°$
	Llano	Su abertura mide 180°.		$\widehat{APB} = 180°$ $\varepsilon = 180°$
	Cóncavo	Su abertura mide más de 180° y menos de 360°.		$180° < \pi < 360°$
	Completo	Su abertura mide 360°.		$\beta = 360°$
Según su posición	**Consecutivos**	Son los que tienen un lado en común.		$\widehat{APC}$ y $\widehat{CPB}$ son consecutivos.
	Adyacentes	Tienen un lado en común y los otros dos lados en línea recta.		$\widehat{APB}$ y $\widehat{CPB}$ son adyacentes. $\widehat{APB} + \widehat{CPB} = 180°$
	Opuestos por el vértice	Los lados de uno son semirrectas contrarias a los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.		Son opuestos por el vértice: • $\widehat{AEB}$ y $\widehat{CED}$ • $\widehat{DEB}$ y $\widehat{CEA}$ $\widehat{AEB} = \widehat{CED}$ y $\widehat{DEB} = \widehat{CEA}$
Según la suma de sus amplitudes	**Complementarios**	Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus amplitudes es igual a 90°.		Por ejemplo: $\pi = 15°$ y $\beta = 75°$ $\pi + \beta = 90°$
	Suplementarios	Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus amplitudes es igual a 180°.		Por ejemplo: $\varepsilon = 120°$ y $\alpha = 60°$ $\varepsilon + \alpha = 180°$

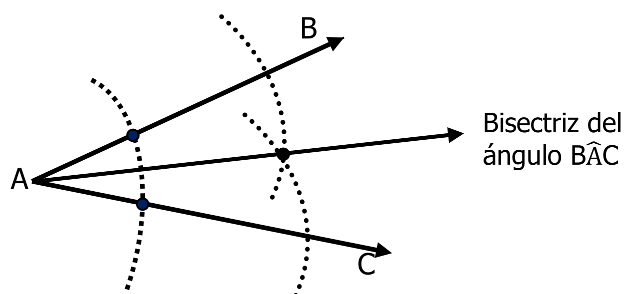
Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una transversal

Conjunto de ocho ángulos que se forman cuando una recta trasversal intercepta a dos rectas paralelas.

<table>
<tr><th colspan="2">Ángulos alternos</th><th colspan="2">Ángulos conjugados</th><th>Ángulos Correspondientes</th></tr>
<tr><td colspan="2">Los ángulos alternos son un conjunto de ángulos no adyacentes a ambos lados de una recta trasversal.

Los ángulos alternos internos y alternos externos, son iguales.</td><td colspan="2">Los ángulos conjugados son un conjunto de ángulos no adyacentes que se encuentran del mismo lado de una recta trasversal.

Los ángulos conjugados internos y externos, son suplementarios (suman 180°).</td><td>Los ángulos correspondientes son un conjunto de ángulos no adyacentes que se encuentran del mismo lado de la transversal, uno es interior y el otro exterior.

Los ángulos correspondientes son iguales.</td></tr>
<tr><td>Alternos Internos
$\delta = \theta$
$\gamma = \varepsilon$</td><td>Alternos Externos
$\alpha = \omega$
$\beta = \pi$</td><td>Conjugados Internos
$\theta + \gamma = 180°$
$\delta + \varepsilon = 180°$</td><td>Conjugados Externos
$\alpha + \pi = 180°$
$\beta + \omega = 180°$</td><td>Correspondientes
$\alpha = \theta$ $\beta = \varepsilon$
$\gamma = \pi$ $\delta = \omega$</td></tr>
</table>

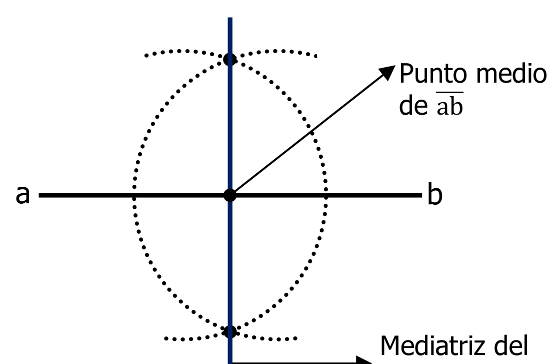
Bisectriz de un ángulo

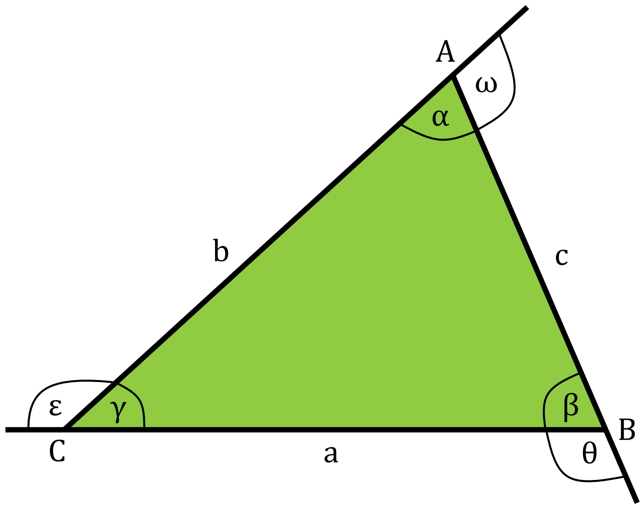
La semirrecta que divide un ángulo en otros dos ángulos iguales se llama bisectriz.
Para trazar la bisectriz de un ángulo, se debe tomar el compás, pinchar en el vértice del ángulo y trazar un arco que corte ambos lados. Desde las intersecciones del arco trazado y los lados del ángulo, sin cambiar la abertura del compás, trazar otros dos arcos.
Con la regla, dibujar una semirrecta con origen en el vértice del ángulo y que pase por el punto común de los dos arcos trazados anteriormente.



Mediatriz de un segmento

La recta perpendicular a un segmento que lo corta en su punto medio se llama mediatriz.
Para trazar la mediatriz de un segmento $\overline{ab}$ debemos tomar el compás con una abertura mayor a la mitad del segmento, pinchar la aguja del compás en el punto "a" y trazar un arco de circunferencia. Luego, sin modificar la abertura del compás, repetimos el procedimiento con centro en el punto "b".
Finalmente dibujamos la recta que pasa por las intersecciones de los arcos formados.
Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.





Triángulos

Un triángulo es un polígono de tres lados.
La notación que se utiliza habitualmente es nombrar a sus vértices con las letras mayúsculas A, B y C (pero pueden ser otras, siempre que sean mayúsculas) y a los lados opuestos a estos vértices, con las respectivas minúsculas, tal como se observa en la imagen.

Propiedades Básicas

La suma de sus ángulos interiores es 180°.

$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = 180°$

La suma de sus ángulos exteriores es 360°.

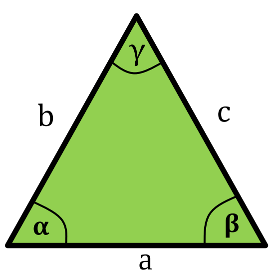
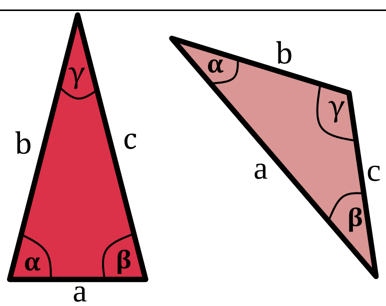
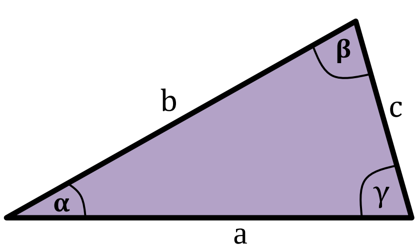
$\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} = 360°$

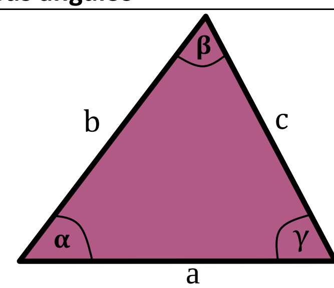
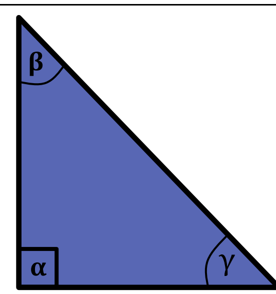
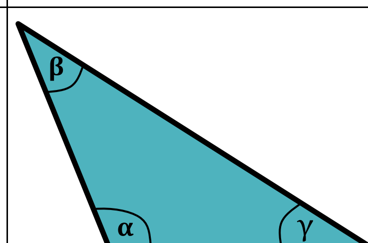
Cada ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

$\boldsymbol{\omega = \beta + \gamma};\ \boldsymbol{\theta = \alpha + \gamma};\ \boldsymbol{\varepsilon = \alpha + \beta}$

Desigualdad Triangular: En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante: $\mathbf{a + b > c}$; $\mathbf{b + c > a}$ y $\mathbf{c + a > b}$.

Clasificación de Triángulos

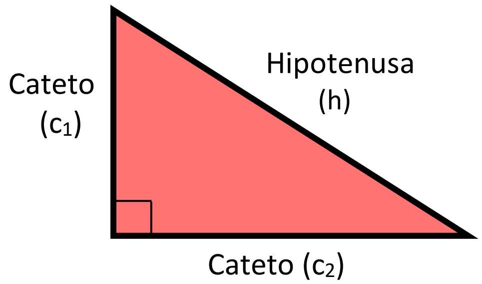
Según sus lados	
Equilátero Tiene todos los lados iguales y todos los ángulos iguales. O sea que cada ángulo mide 60°. $\mathbf{a = b = c}$ $\boldsymbol{\alpha = \beta = \gamma} = \mathbf{60°}$	
Isósceles Tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales. $\mathbf{b = c}$ $\boldsymbol{\alpha = \beta}$	
Escaleno Todos sus lados son diferentes y sus ángulos también. $\mathbf{a \neq b \neq c}$ $\boldsymbol{\alpha \neq \beta \neq \gamma}$	

Según sus ángulos	
Acutángulo Tiene los tres ángulos agudos. O sea que los tres ángulos miden menos de 90°. $\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{90°}$ $\boldsymbol{\beta} < \mathbf{90°}$ $\boldsymbol{\gamma} < \mathbf{90°}$	
Rectángulo Tiene un ángulo recto. O sea que un ángulo mide exactamente 90° y los otros dos ángulos son agudos. $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{90°}$ $\boldsymbol{\beta} < \mathbf{90°}$ $\boldsymbol{\gamma} < \mathbf{90°}$	
Obtusángulo Tiene un ángulo obtuso, o sea que un ángulo mide más de 90°. $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{90°}$ $\boldsymbol{\beta} < \mathbf{90°}$ $\boldsymbol{\gamma} < \mathbf{90°}$	

Triángulos Rectángulos

Teorema de Pitágoras:

El Teorema de Pitágoras afirma que: “En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.



$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Esta fórmula sirve para calcular el tercer lado de un triángulo rectángulo, sabiendo cuánto valen los otros dos.
La hipotenusa siempre es el lado más largo del triángulo.
Los catetos son los dos lados que forman el ángulo recto.

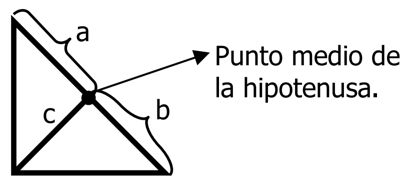
Fórmulas despejadas para hallar la hipotenusa o un cateto:

$$h = \sqrt{c^2 + c^2} \qquad c = \sqrt{h^2 - c^2}$$

Propiedad importante del punto medio de la hipotenusa

El punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices de un triángulo rectángulo:

$$a = b = c$$

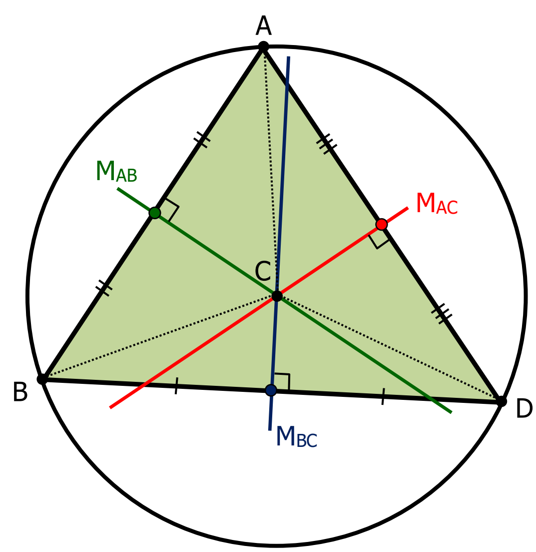


Rectas y puntos notables de un triángulo

Mediatrices

Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a cada uno de los lados que los cortan por sus puntos medios.

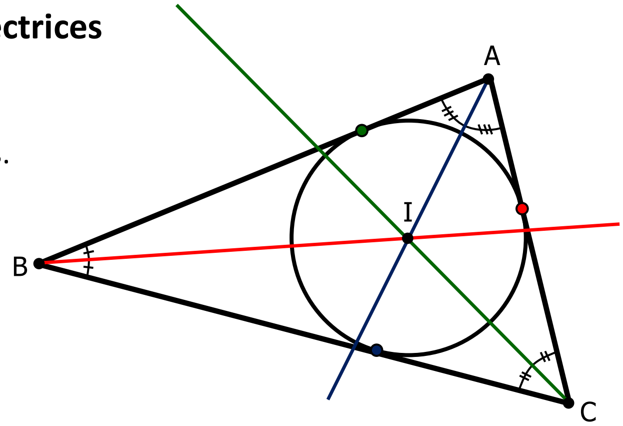
- M_{AB} es la mediatriz del lado AB, es perpendicular a AB y pasa por su punto medio.
- M_{AC} es la mediatriz del lado AC, es perpendicular a AC y pasa por su punto medio.
- M_{BC} es la mediatriz del lado BC, es perpendicular a BC y pasa por su punto medio.



El **circuncentro (C)** de un triángulo es el punto en el que se cortan sus tres mediatrices.
El **circuncentro** es el centro de la **circunferencia circunscrita** que es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

CB = CD = CA = radio de la circunferencia circunscrita.

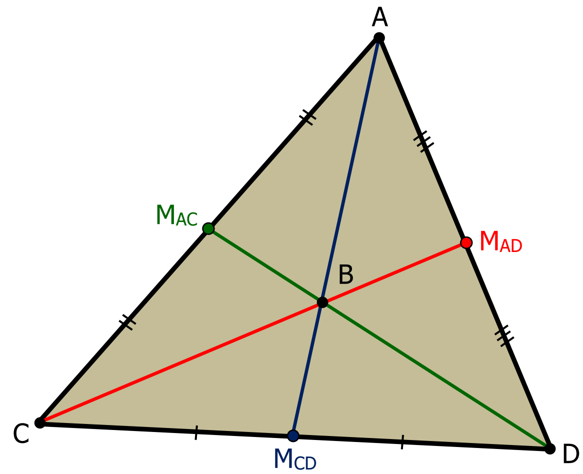
Bisectrices



Las **bisectrices** de un triángulo son las rectas que dividen cada uno de sus ángulos en otros dos iguales.

El **incentro (I)** de un triángulo es el punto de intersección de las tres bisectrices.
El incentro es el centro de la **circunferencia inscrita**.

Medianas



Las **medianas** de un triángulo son los segmentos que unen los vértices con los puntos medios de sus respectivos lados opuestos.

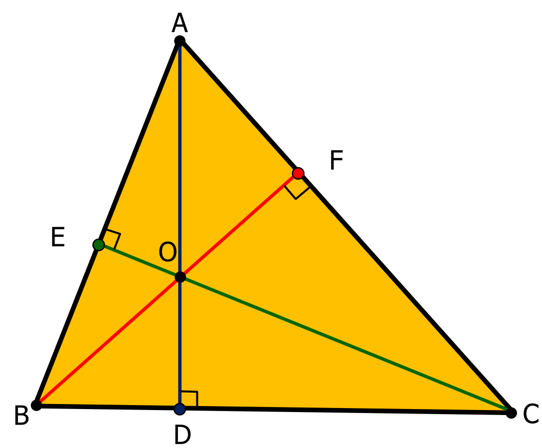
El **baricentro (B) o centroide** de un triángulo es el punto en el que se cortan las tres medianas.
Este punto divide a cada una de las medianas en la relación 1:2, o sea:

$\mathbf{AB = 2.BM_{CD}}$

$\mathbf{BM_{AD} = 2.BC}$

$\mathbf{BM_{AC} = 2.BD}$

Alturas



Las **alturas** de un triángulo son los segmentos que unen los vértices con sus respectivos lados opuestos, o con sus prolongaciones, y son perpendiculares a estos.
El **ortocentro (O)** de un triángulo es el punto en el que se cortan las tres alturas.
Los puntos **F**, **E**, y **D** son los pies de las alturas de los lados **AC**, **AB** y **BC** respectivamente.

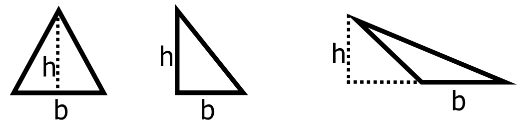
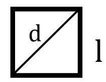
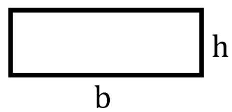
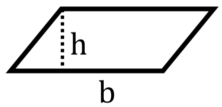
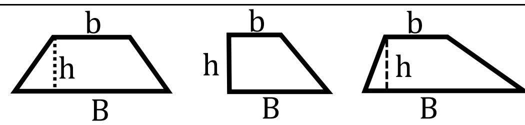
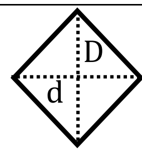
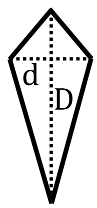
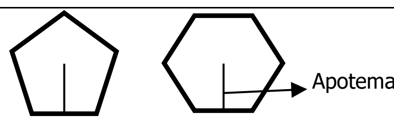
En todo triángulo:

- Al menos una de las alturas se encuentra dentro del triángulo.
- La altura de mayor longitud es la correspondiente a la del lado menor del triángulo.
- La suma de las tres alturas de todo triángulo es menor que el perímetro de este.

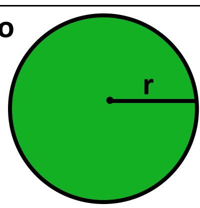
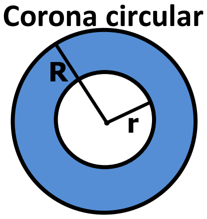
Propiedades de los polígonos

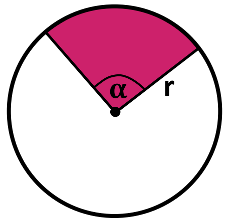
Siendo **n** el número de lados del polígono:
SAI (Suma de los ángulos interiores de un polígono): 180°.(n – 2)
SAE (Suma de los ángulos exteriores de un polígono): 360°

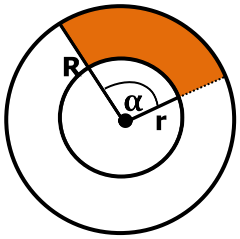
Superficie (o área) de figuras planas - Fórmulas

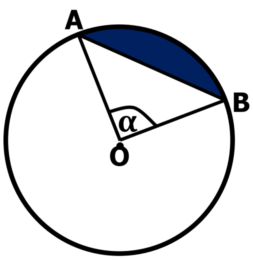
Nombre	Grafico	Fórmula para calcular la superficie
Triángulo		Superficie = $\dfrac{b \,.\, h}{2}$
Cuadrado		Superficie = l^2 = l.l Otra: Superficie = $d^2/2$
Rectángulo		Superficie = b . h
Paralelogramo		Superficie = b . h
Trapecio		Superficie = $\dfrac{(B+b)\,.\,h}{2}$
Rombo		Superficie = $\dfrac{D\,.\,d}{2}$
Deltoide (también llamado romboide)		Superficie = $\dfrac{D\,.\,d}{2}$
Polígonos Regulares	 Aquí se muestra solamente el dibujo de un pentágono y un hexágono regular, pero la fórmula sirve para cualquier polígono regular.	Sup.= $\dfrac{\text{Perímetro}\,.\,\text{Apotema}}{\mathbf{2}}$

Longitud y superficie de figuras circulares

Círculo 	**Superficie del círculo: $\pi.\, r^2$** **Longitud del círculo: $2.\, \pi.\, r$**
Corona circular 	Llamamos ***corona circular*** a la parte del plano comprendida entre dos circunferencias que tienen el mismo centro **Superficie de corona circular: $\pi.(R^2 - r^2)$**

<table>
<tr>
<td>Sector circular

</td>
<td>El sector circular es la superficie del círculo comprendida entre dos radios y el arco.

$\boxed{\textbf{Superficie del sector circular: } \dfrac{\pi.\,r^2.\ \alpha}{360°}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Trapecio circular

</td>
<td>Un trapecio circular es la porción de círculo limitada por dos radios y una corona circular.

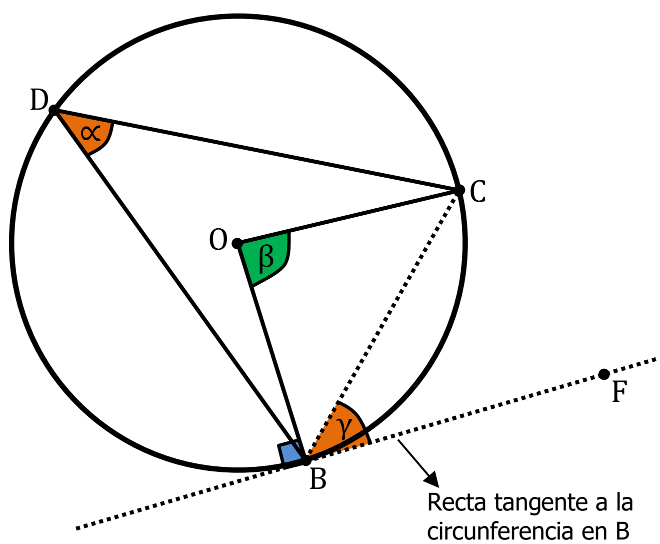
$\boxed{\textbf{Superficie del sector circular: } \dfrac{\pi.(\,R^2 - r^2).\ \alpha}{360°}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Segmento circular

</td>
<td>Un segmento circular es la porción de círculo que está limitada por una cuerda (segmento que uno dos puntos cualesquiera de una circunferencia) y el arco que ésta comprende

$\boxed{\textbf{Sup. del segmento circular: } \dfrac{r^2}{2}\ .\left(\dfrac{\pi.\alpha}{180°} - \ \textbf{sen}\ \propto\right)}$

Otra:

$\boxed{\textbf{Sup. del segmento circular: Sup. sector circular} - \textbf{sup. triángulo AOB}}$</td>
</tr>
</table>

Relación entre el ángulo central, inscrito y semiinscrito en una circunferencia



El ángulo central es el formado por dos radios de una circunferencia, por lo que su vértice es el centro de ésta. En el ejemplo es el ángulo $C\hat{O}B$ o β.

Es ángulo inscrito es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son rectas secantes. En el ejemplo es el ángulo $C\hat{D}B$ o $\propto$.

El ángulo semiinscrito es aquél cuyo vértice está en la circunferencia, un lado es secante y el otro es tangente a ella. En el ejemplo es el ángulo $C\hat{B}F$ o γ.

Propiedades:

$\propto = \gamma$ $\qquad$ $\beta = 2.\propto$ $\qquad$ $\beta = 2.\,\gamma$

Práctica

Números Enteros

1) Completar la tabla:

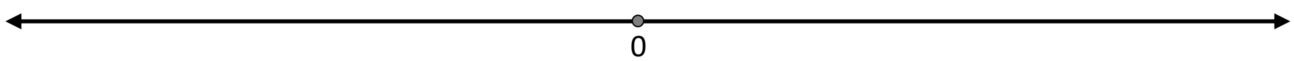
Número n	Opuesto de n	Signo de n	Valor absoluto de n: $|n|$
-13			
4			
-2			
-15			
-1548			
1548			
-3634			

2) ¿Qué números enteros tienen valor absoluto 9?

3) La distancia entre un número entero positivo y su opuesto es 98 ¿Cuál es ese número?

4) Representar los siguientes números enteros en la recta numérica:

5, 8, -1, -6, 4, -3, 9, -7, 10, -11 y 6.



a) ¿Cuál es el menor? b) ¿Cuál es el mayor?

c) ¿Hay números opuestos representados en la recta? ¿Cuáles?

5) Teniendo en cuenta los siguientes números enteros: -8; 12; 2; -7; 0; -9; 7. Indicar cuáles de ellos cumplen las siguientes condiciones.

a) Son menores que 7:

b) Son mayores que 0:

c) Son mayores que -8:

d) Son menores que 0:

6) Calcular cuántos números enteros hay entre:

a) -3 y 2 b) -5 y -1 c) 2 y 12 d) 20 y 38.

e) Anotar los procedimientos empleados en la resolución y tratar de escribir una expresión que sirva como regla general.

7) Completar con >, < o =

23 19	-6 .... -7	0 .... -1	-46 .... $|46|$	$|57|$ .... $|-57|$
33 .... -34	-22 22	98 .... $|-98|$	5 0	-28 .... -29

8) Ordenar de forma creciente (de menor a mayor): 7; 6; -2; -12; 1; 5; 0; -10; -82; 100; -101; 98.

Suma y resta de números enteros

Los números negativos se pueden interpretar como deudas o dinero que se debe, de igual forma, los números positivos se pueden interpretar como dinero que se tiene a favor.

Ejemplos:

- Si una persona tiene \$10 y debe \$8, al pagar le quedarán solamente \$2. Esto se puede escribir: +10 – 8 = 2.
- Si una persona tiene \$15 y debe \$18, al pagar quedará debiendo \$3. Esto se puede escribir: +15 – 18 = -3.
- Si una persona debe \$7 y también debe \$3, en total estará debiendo \$10. Esto se puede escribir: –7 – 3 = –10.

9) Resolver las siguientes operaciones:

a) –15 + 30 =
b) –12 – 10 =
c) 25 – 30 =
d) 32 – 31 =
e) –48 + 50 =
f) –3 – 10 =

Choque de signos:	**Ejemplo:**
+(–) = –	8 + (– 6) = 8 – 6 = 2
– (+) = –	10 – (+2) = 10 – 2 = 8
– (–) = +	20 – (–2) = 20 + 2 = 22
+ (+) = +	–6 + (+7) = –6 + 7 = 1

10) Resolver:

a) 9 + (–15) =
b) –6 – (+10) =
c) 28 – (–12) =
d) –14 + (+24) =

Utilizando estas propiedades, cuando se realiza una suma y/o resta de muchos términos, es conveniente agrupar los positivos, por un lado, los negativos por otro. Por ejemplo:

- 8 + 14 – 4 + 12 – 10 – 50 = $\underbrace{8 + 14 + 12}_{positivos}\ \underbrace{-4 - 10 - 50}_{negativos}$ = 44 – 64 = -20.
- 3 + (–4) – (+10) + (–6) – (–47) = 3 – 4 – 10 – 6 + 47 = $\underbrace{3 + 47}_{positivos}\ \underbrace{-4 - 10 - 6}_{negativos}$ = 50–20 = 30.

11) Resolver las siguientes operaciones:

a) –8 + 14 – 12 + 16 – 14 =

b) 15 – 2 – 7 + 35 – 28 + 2 – 35 =

c) –38 + 15 + 2 – 40 – 12 =

d) –7 + 28 – 148 + 7 – 28 + 148 =

e) –25 – (+14) + (–6) – 80 – (–100) =

f) 12 + (+24) – (+36) + (–2) – (–5) =

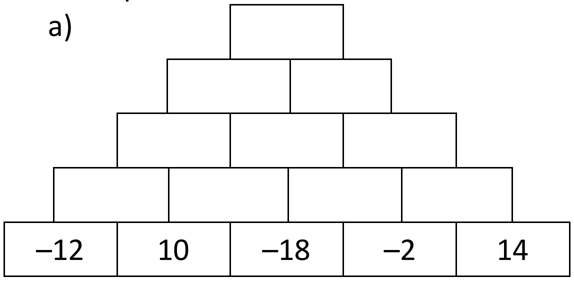
g) – (–12) – (–32) + (–50) + (+6) – (+0) =

h) 32 – (–126) + (–8) + (+126) – (+32) =

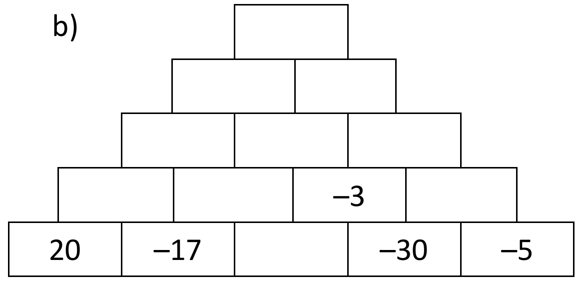
12) En un rectángulo de 1 x 101, dividido en casillas cuadradas de 1 x 1, Alex escribió un número entero en cada casilla, de manera tal que la suma de los tres números escritos en tres casillas consecutivas era siempre igual a 9. Luego borró todos los números escritos, excepto el de la tercera casilla y el de la décima casilla, contadas de izquierda a derecha: un 3 y un 10 respectivamente. Hallar el número que había escrito Alex en la última casilla de la derecha (la casilla número 101).

13) Completar las siguientes pirámides sumando los números de los ladrillos vecinos y colocando el resultado en el ladrillo que se encuentra encima de ellos:

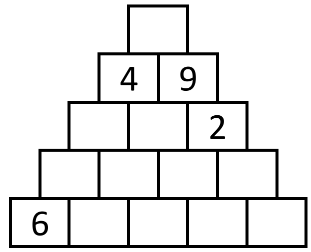
a)



b)



14) Colocar en cada casilla un número entero entre 1 y 15 inclusive, sin repetir, para que cada número colocado en una casilla sea igual a la resta de los dos números de las casillas en las que se apoya (el mayor menos el menor).



15) Una persona nació en el año 32 antes de Cristo y murió en el año 24 después de Cristo. ¿Cuántos años vivió?

16) Una sustancia que está a 30° C es enfriada hasta llegar a 8° C bajo cero. ¿Cuántos grados centígrados se enfrió en total a la sustancia?

17) Ana y José son los padres de Pablo. Entre los tres suman 77 años. Entre Ana y Pablo suman 45 años. Entre José y Pablo suman 47 años. Las edades de Ana, José y Pablo son, respectivamente

a) 30 – 32 y 15 b) 32 – 30 y 15 c) 30 – 30 y 17 d) 33 – 32 y 13

18) Si hoy es jueves. ¿Qué día es el ayer de pasado mañana de mañana de mañana de anteayer?

a) jueves b) viernes c) sábado
d) domingo e) miércoles f) lunes

19) Si el mañana de mañana de pasado mañana del ayer de anteayer de mañana de hace 5 días fue domingo. ¿Qué día será pasado mañana?

a) sábado b) domingo c) lunes d) viernes e) martes

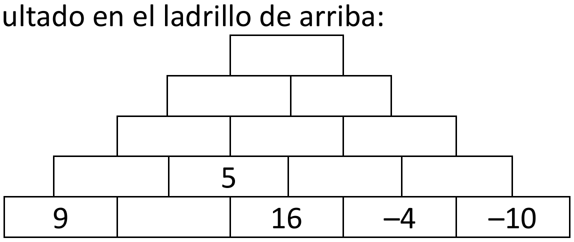
Ejercicios varios de repaso

20) Resolver las siguientes operaciones:

a) –35 + 10 – 12 + 35 – 6 + 14=

b) –1 + (–8) + (+6) – (–4) + 2 =

21) Completar la pirámide sumando los dos ladrillos que están juntos y escribiendo el resultado en el ladrillo de arriba:



22) Una persona nació en el año 32 antes de Cristo y murió en el año 58 después de Cristo. ¿Cuántos años vivió?

23) Completar colocando "<", ">" o "=".

–12 ……… –13	15 ………. $\lvert -15 \rvert$	26 ……… 32
4 ………. –6	$-\lvert 12 \rvert$…….. –12	$\lvert 40 \rvert$….. $\lvert -40 \rvert$

24) Completar el cuadro:

Número (n)	Opuesto de n	Valor Absoluto $\lvert n \rvert$
–138		
784		
12		
–485		

25) Un ascensor parte de la Planta Baja, desciende al segundo subsuelo, luego sube 6 pisos, desciende 2, sube 3, desciende 8 y sube 4. ¿En qué piso se encuentra?

a) 1° b) 2° c) 3° d) 4°

Multiplicación y división de números enteros

Multiplicación: Podemos escribir la suma 8 + 8 + 8 se forma abreviada, utilizando la multiplicación: 8 + 8 + 8 = 3 . 8 = 24.

De la misma manera: 3 . (–8) = –8 + (–8) + (–8) = ………………………………………………………………………….

El producto de dos enteros es:

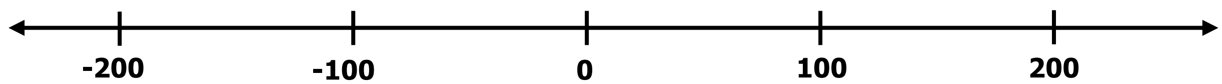
- **Positivo si ambos tienen el mismo signo;**
- **Negativo si ambos tienen distinto signo.**

(+) . (+) = (+)
(–) . (–) = (+)
(–) . (+) = (–)
(+) . (–) = (–)

Ejemplos:

a) $\underbrace{(+8).(+2) \;=\; 8\,.\,2 \;=\; 16}_{(+)\,.\,(+)\,=\,(+)}$ b) $\underbrace{(-8).(-2) \;=\; 16}_{(-)\,.\,(-)\,=\,(+)}$ c) $\underbrace{(-8).(+2) \;=\; -16}_{(-)\,.\,(+)\,=\,(-)}$ d) $\underbrace{(+8).(-2) \;=\; -16}_{(+)\,.\,(-)\,=\,(-)}$

Una manera de ver un ejemplo práctico en donde se justifique esta regla de signos es la siguiente. Supongamos que un auto avanza a velocidad constante de 100km/h. Cuando va hacia adelante consideramos que su velocidad es 100km/h y cuando va hacia atrás -100km/h. Suponiendo que inicialmente estamos ubicados en el kilómetro 0.



- Si avanza hacia adelante, ¿dónde estará luego de 2 horas? $\underbrace{2\text{hs}\,.100\text{km/h} \;=\; 200\text{km}}_{(+)\,.\,(+)\,=\,(+)}$
- Si avanza hacia adelante, ¿dónde estaba hace 2 horas? $\underbrace{-2\text{hs}\,.100\text{km/h} \;=\; -200\text{km}}_{(-)\,.\,(+)\,=\,(-)}$
- Si avanza hacia atrás, ¿dónde estará luego de 2 horas? $\underbrace{2\text{hs}\,.\,(-100\text{km/h}) \;=\; -200\text{km}}_{(+)\,.\,(-)\,=\,(-)}$
- Si avanza hacia atrás, ¿dónde estaba hace 2 horas? $\underbrace{-2\text{hs}\,.\,(-100\text{km/h}) \;=\; 200\text{km}}_{(-)\,.\,(-)\,=\,(+)}$

26) Resolver las siguientes operaciones:

a) 8 . (−3) = c) −4 . 7 = e) 80 . 2 = g) −18 . (−7) =
b) −6 . (−3) = d) −16 . (−2) = f) 13 . (−4) = h) −5 . 12 =

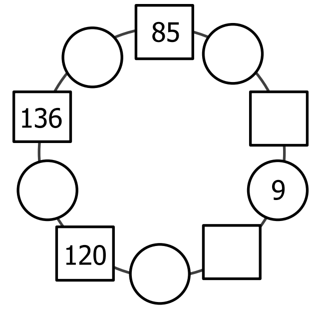
27) Pensar y escribir sobre la línea punteada, la multiplicación de dos números enteros, distintos que 1 y −1, para que el resultado sea el indicado:

a) ……………………… = 14 d) ……………………… = −40
b) ……………………… = 36 b) ……………………… = 125
c) ……………………… = −120 c) ……………………… = 132

28) Escribir un número entero entre 1 y 9 en cada casilla, sin repeticiones, para que en cada fila la multiplicación de los tres números sea igual al número indicado a su derecha y en cada columna la multiplicación de los tres números sea igual al número indicado debajo.

			70
			48
			108
64	45	126	

29) Andrés escribió un número entero en cada círculo y después puso en cada cuadrado el resultado de multiplicar los números que estaban en los dos círculos vecinos.
Algunos de los números se borraron.
Completa los cuadrados y círculos vacíos con los números que había escrito Andrés. Explica cómo los encontraste



División: Resolver a:b, si a y b son dos números enteros es hallar un entero c que verifique c.b = a.
Por ejemplo: 6:3 = 2 porque 2.3 = 6.

- **a : b = c si c . b = a siendo b $\neq$ 0 (No se puede dividir por 0).**
- **Este entero c es el cociente entre a y b.**
- **El cociente entre dos números enteros a y b es:**
  - **Positivo, si a y b tienen el mismo signo.**
  - **Negativo, si a y b tienen distinto signo.**

(+) : (+) = (+)
(–) : (–) = (+)
(–) : (+) = (–)
(+) : (–) = (–)

Ejemplo: a) $\underbrace{(+18):(+3) = 18:3 = 6}_{(+):(+)=(+)}$ Porque 6.3 = 18. b) $\underbrace{(-8):(-2) = 4}_{(-):(-)=(+)}$ Porque 4.(−2) = −8.

c) $\underbrace{(-24):(+4) = -6}_{(-):(+)=(-)}$ Porque −6.4 = −24 d) $\underbrace{(+30):(-6) = -5}_{(+):(-)=(-)}$ Porque −5.(−6) = 30.

30) Resolver las siguientes operaciones:

a) −48 : (−3) = c) 4 : (−1) = e) −80 : (−4) = g) 10 : 0 =
b) 16 : (−2) = d) 21 : 7 = f) 13 : (−13) = h) −35 : (−7) =

Operaciones combinadas con números enteros

Las operaciones combinadas son aquellas en donde aparecen varias operaciones aritméticas para resolver: suma, resta, multiplicación, división, etc.

Por ejemplo: 8.(−2) + 7:(−1) − 20:(−5) + 12 =

Separar en términos: 8.(−2) − 7:(−1) +20:(−5) + 12 =

Resolver cada término: −16 + 7 − 4 + 12 =

Agrupar por signo: + 7 + 12 − 16 − 4 =

Resolver: + 19 − 20 = −1.

31) Resolver las siguientes operaciones combinadas:

a) −18:(−6) – 4.5 + 12:(−3) + 8.2 = c) −14 . 2 + 28:(– 7) + 15.(−1) – 18:9 =

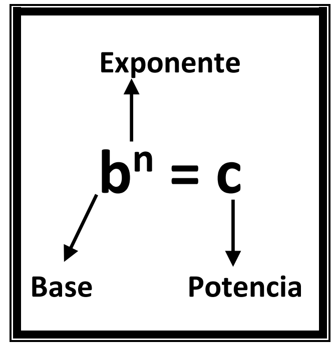
b) 32:(−4) + 6.(– 2) – 25:(−1) + 3:(–3) = d) −19.(−3) + 16.(– 3) – 100:10 + 26:26 =

Potenciación de números enteros

La potenciación es una manera abreviada de escribir el producto de factores iguales.
Por ejemplo: 4 . 4 . 4 = 4^3 o (-3).(-3).(-3).(-3).(-3) = $(-3)^5$.

Se escribe b.b = b^2 y se lee "b al cuadrado"
Se escribe m.m.m = m^3 y se lee "m al cubo"
Se escribe $\underbrace{f.f.f\ldots\ldots.f}_{n\ veces}$ = f^n y se lle "f a la n".

Para completar la definición, se escribe:
$f^1 = f$ (Todo número f elevado a la 1, da el mismo número f).
$f^0 = 1$ (Todo número f $\neq$ 0, elevado a la 0, da 1).



32) Resolver las siguientes potencias:

a) 5^2 =	c) $(-10)^3$ =	e) 10^3 =	g) 3^3 =	i) 1547^1 =
b) $(-3)^2$ =	d) $(-1)^4$ =	f) 1^{48} =	h) 0^3 =	j) $(-9)^0$ =

33) Resolver las siguientes potencias de 2 y -2:

a) 2^1 =	e) 2^5 =	i) $(-2)^1$ =	e) $(-2)^5$ =
b) 2^2 =	f) 2^6 =	j) $(-2)^2$ =	f) $(-2)^6$ =
c) 2^3 =	g) 2^7 =	k) $(-2)^3$ =	g) $(-2)^7$ =
d) 2^4 =	h) 2^8 =	l) $(-2)^4$ =	h) $(-2)^8$ =

34) Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, podemos afirmar que:

- **Las potencias de exponente par son siempre ………………………………………………………………..**
- **Las potencias de exponente impar y de bases negativas son ………………………………………………**

35) Resolver las siguientes potencias:

a) 0^2 =	e) 0^5 =	i) $(-10)^2$ =	e) $(-1)^{58}$ =
b) $(-1)^{203}$ =	f) 13^1 =	j) 10^2 =	f) m^1 =
c) $(-3)^1$ =	g) $(-3)^4$ =	k) 30^2 =	g) z^0 =
d) 4^0 =	h) $(-6)^3$ =	l) $(-900)^0$ =	h) $(-6)^2$ =

36) Unir con flechas las potencias que tengan igual resultado (Puede utilizar calculadora):

$2^3 . 2^2$	2^6
$3^4 : 3^3$	5^2
$(2^2)^3$	4^4
$(4^2)^2$	2^5
$5^3 : 5^1$	5^3
$5^1 . 5^2$	4^2
$4^4 : 4^2$	3^1

En base a este ejercicio podemos deducir las siguientes:

Propiedades de las potencias

- **Multiplicación de potencias de igual base:** ……….
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
- **División de potencias de igual base:** …………………..
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

Potencia de potencia: ……………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

37) Resolver aplicando las propiedades de las potencias.

a) $5^8 \cdot 5^{12} : 5^{18} =$

f) $(15^{18} \cdot 15^{14}) : (15^5)^6 =$

b) $7^{15} \cdot 7^3 : (7^2)^9 =$

g) $(17^{12} \cdot 17^5 \cdot 17)^3 : (17^3 \cdot 17^8)^5 =$

c) $(-3)^{14} : (-3)^{12} \cdot (-3)^3 =$

h) $[(-6)^{28} : (-6)^{20}] \cdot [(-6)^7 : (-6)^4]^2 =$

d) $[(-10)^{16} \cdot (-10)^{13}] : [(-10)^7]^4 =$

i) $[(-20)^2 \cdot (-20)^6 \cdot (-20)]^4 : [(-20)^7]^5 =$

e) $(8^4 \cdot 8 \cdot 8^7) : (8^3)^4 =$

j) $(3^9 \cdot 3^7 \cdot 3^4) : (3^3 \cdot 3)^5 =$

38) La suma de los dígitos del número $2^{2010} \cdot 5^{2014}$ es igual a:

a) 8 b) 9 c) 11 d) 13

Radicación de números enteros

La radicación es la operación inversa de la potenciación. Por ejemplo:

- **$\sqrt{16} = 4$ (la raíz cuadrada de 16 es 4) porque $4^2 = 16$.**
  Si bien $(-4)^2$ también es 16, se considera el resultado positivo.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$ (la raíz cúbica de -8 es igual a -2) porque $(-2)^3 = -8$.

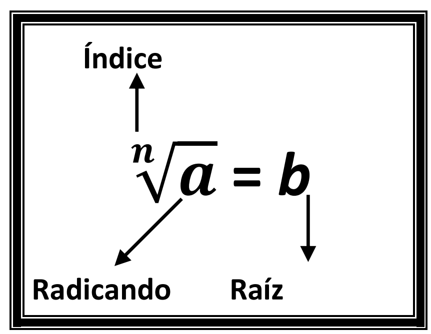
39) Resolver las siguientes raíces:

a) $\sqrt{25} =$ c) $\sqrt[4]{16} =$ e) $\sqrt{0} =$ g) $\sqrt{-100} =$

b) $\sqrt{16} =$ d) $\sqrt[3]{-1} =$ f) $\sqrt[5]{-32} =$ h) $\sqrt[3]{64} =$

40) Teniendo en cuenta el ejercicio anterior podemos afirmar que:

- **Si el índice (n) es impar y el radicando (a) es:**
  - **positivo, la raíz será ....**
  - **negativo, la raíz será ....**
- **Si el índice (n) es par y el radicando (a) es:**
  - **positivo, la raíz será ....**
  - **negativo, la raíz ....**



41) Resolver las siguientes raíces:

a) $\sqrt{400} =$ e) $\sqrt[6]{-1} =$ i) $\sqrt{4} =$ m) $\sqrt[3]{-27} =$ q) $\sqrt{-64} =$

b) $\sqrt{-36} =$ f) $\sqrt[3]{1000} =$ j) $\sqrt[5]{-243} =$ n) $\sqrt[6]{64} =$ r) $\sqrt[3]{343} =$

c) $\sqrt{36} =$ g) $\sqrt[3]{-1000} =$ k) $\sqrt{-9} =$ o) $\sqrt[6]{-64} =$ s) $\sqrt{81} =$

d) $\sqrt[5]{-1} =$ h) $\sqrt{121} =$ l) $\sqrt[3]{27} =$ p) $\sqrt{64} =$ t) $\sqrt{900} =$

Cuadrados y cubos perfectos

Números cuadrados perfectos:

42) En la siguiente tabla las casillas de la primera fila contienen los números enteros del 1 al 13.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Hay que escribir en la segunda fila los números enteros del 1 al 13, sin repeticiones, y en la tercera fila, la suma de los números correspondientes a la primera y segunda fila. El objetivo es que los números de la tercera fila sean todos cuadrados perfectos.

43) En un tablero como el de la figura, colocar en cada casilla un número entero entre 1 y 16, sin repetir, de manera que la suma de los números escritos en dos casillas vecinas sea siempre un cuadrado perfecto.

Aclaraciones: Dos casillas son vecinas si tienen un lado común.

Números cubos perfectos:

44) Del conjunto de los números naturales se suprimieron los cuadrados perfectos y los cubos perfectos. De los números que quedaron (sin suprimir) consideramos los 200 números más chicos. Hallar el mayor de estos 200 números.

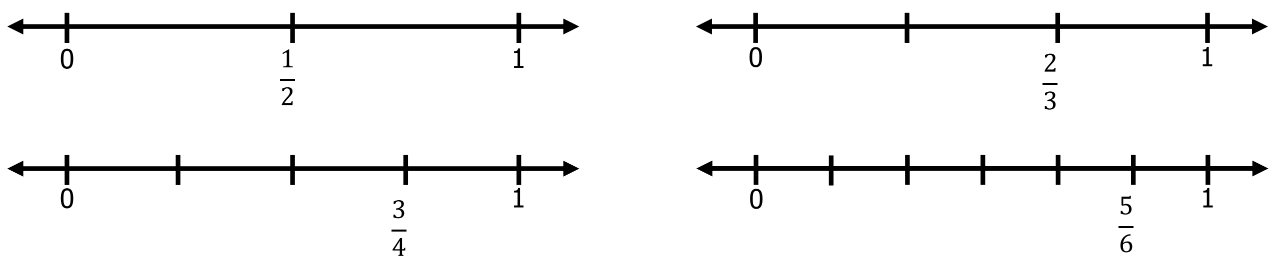
Números Racionales

Un Número Racional es todo aquel que puede representarse como el cociente de dos números enteros o, más precisamente, un entero y un natural positivo.

- **Un número fraccionario es de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b enteros y b $\neq$ 0.**

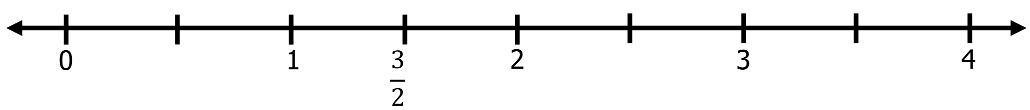
$\mathbf{a} \longrightarrow$	**Numerador**
$\mathbf{b} \longrightarrow$	**Denominador**

Ejemplo 1: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ son fracciones de la unidad en las que el numerador es menor que el denominador y se representan en la recta numérica entre el 0 y el 1.

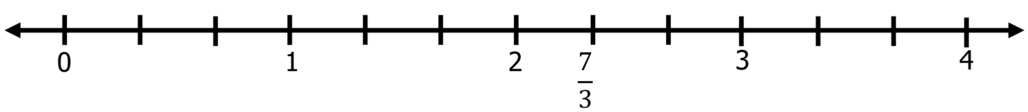


Ejemplo 2: También son fraccionarios $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{3}$ y $\frac{13}{4}$. En estos números el numerador es mayor que el denominador y cada uno de ellos equivale a varias unidades completas más una fracción de la unidad.

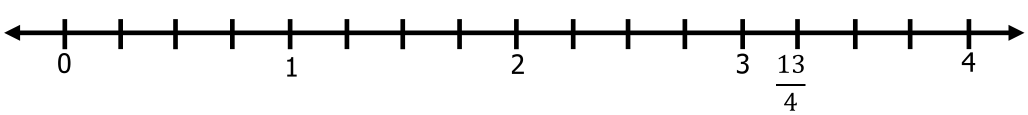
$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$



$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$



$\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$



1) Elegir convenientemente alguna de las rectas anteriores y representar en ellas los siguientes números racionales: $\frac{10}{3}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{11}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{4}$.

2) Construir rectas numéricas y graficar los siguientes números racionales:

a) $\frac{8}{7}$; $-\frac{1}{7}$; $\frac{4}{7}$; $-\frac{3}{7}$; $\frac{14}{7}$; $-\frac{5}{7}$; $-\frac{8}{7}$; $\frac{9}{7}$ y $\frac{11}{7}$.

b) $-\frac{4}{9}$; $-\frac{7}{9}$; $\frac{5}{9}$; $-\frac{10}{9}$; $-\frac{11}{9}$; $\frac{14}{9}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{18}{9}$ y $-\frac{9}{9}$.

- **Convención: un número fraccionario negativo se representa con numerador negativo y denominador positivo: $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ con a y b positivos.**

3) Indicar cuáles de estos números: $-\frac{5}{2}$; $\frac{2}{5}$; $-\frac{4}{5}$; $\frac{8}{7}$; -3; $\frac{-1}{3}$; $\frac{7}{4}$ y $\frac{5}{6}$.

a) son menores que 0.

b) son mayores que cero y menores que 1.

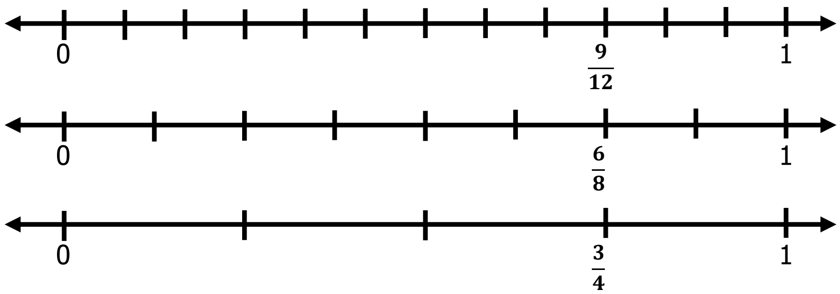
c) son mayores que 1.

d) son mayores que 0 y menores que $\frac{7}{4}$.

Fracciones equivalentes

Las fracciones equivalentes representan el mismo número racional. Por ejemplo: $\frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Veamos estas fracciones representadas en la recta numérica:



Todas están en el mismo punto, o sea que representan el mismo número racional.

Cualquiera sea el número entero m $\neq$ 0, las expresiones $\frac{a}{b}$ y $\frac{m.a}{m.b}$ representan el mismo número racional.

$$\frac{a}{b} = \frac{m.a}{m.b}$$

Si el numerador y el denominador son coprimos, la fracción es irreducible. En el ejemplo anterior:

- En $\frac{9}{12}$, el numerador 9 y el denominador 12, son ambos divisibles por 3, entonces la fracción no es irreducible.
- En $\frac{6}{8}$, el numerador 6 y el denominador 8, son ambos divisibles por 2, entonces la fracción no es irreducible.
- En $\frac{3}{4}$, el numerador 3 y el denominador 4, son coprimos, porque ambos no son divisibles por un mismo número distinto que 1, entonces la fracción es irreducible.

4) Encontrar tres fracciones que representen el mismo número racional que:

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{-2}{3}$ c) -5 d) $\frac{9}{5}$

5) Escribir tres fracciones que tengan denominador menor que 100 y representen el mismo número racional que $\frac{7}{10}$.

6) Completar con los numeradores o denominadores que faltan:

a) $\frac{15}{18} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{42}$. b) $\frac{-5}{7} = \frac{-15}{\quad} = \frac{\quad}{49}$. c) $\frac{5}{6} = \frac{\quad}{12} = \frac{45}{\quad}$.

7) En la recta numérica, el número que está exactamente en el medio entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{12}$ es:

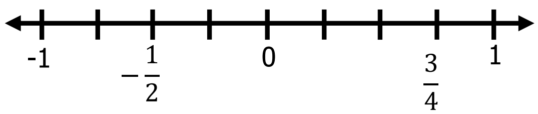
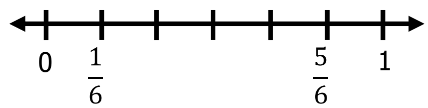
a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

Comparación de fracciones

En algunos casos, es fácil comparar fracciones:

- **Una fracción negativa es siempre menor que una positiva.**
- **De dos fracciones de igual denominador, es menor la que tiene menor numerador.**

Ejemplos:

Fración negativa con fracción positiva	Fracciones de igual denominador
 $\mathbf{-\frac{1}{2} < \frac{3}{4}}$	 $\mathbf{\frac{1}{6} < \frac{5}{6}}$

- **Cuando las fracciones tienen diferente denominador se pueden transformar en fracciones equivalentes con igual denominador.**

Por ejemplo: $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{8}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{2.8}{3.8} = \frac{16}{24}$ $\qquad$ $\frac{5}{8} = \frac{5.3}{8.3} = \frac{15}{24}$

Ahora que las dos tienen el mismo denominador, vemos que la primera tiene el mayor numerador, por lo tanto, es la mayor. Finalmente $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$.

En general, para comparar dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$.

Como $\frac{a}{b} = \frac{a.d}{b.d}$ y $\frac{c}{d} = \frac{c.b}{d.b}$

vemos que ambas quedan con el mismo denominador, por lo tanto, bastará comparar a.d y c.b.

- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ **si y sólo sí a.d < c.b**
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **si y sólo sí a.d = c.b**
- $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ **si y sólo sí a.d > c.b**

Ejemplos: $\frac{12}{7} > \frac{13}{8}$ porque $12 . 8 > 13 . 7 \Rightarrow 96 > 91$.

$-\frac{4}{5} < -\frac{3}{7}$ porque $(-4) . 7 < (-3) . 5 \Rightarrow -28 < -15$.

8) Colocar >, = o < según corresponda:

a) $-\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{5}{4}$	b) $\frac{3}{5}$ $\quad$ $\frac{3}{4}$	c) $\frac{7}{4}$ $\quad$ $\frac{14}{8}$	d) $2\frac{3}{5}$ $\quad$ $2\frac{2}{3}$
e) $\frac{5}{6}$ $\quad$ $-\frac{7}{5}$	f) $\frac{6}{3}$ $\quad$ $\frac{4}{3}$	g) $-\frac{7}{6}$ $\quad$ $-\frac{6}{5}$	h) $\frac{8}{9}$ $\quad$ $\frac{6}{7}$
i) $-\frac{1}{3}$ $\quad$ $-\frac{2}{3}$	j) $-\frac{8}{5}$ $\quad$ $-\frac{4}{3}$	k) $\frac{10}{6}$ $\quad$ $\frac{15}{9}$	l) $\frac{7}{12}$ $\quad$ $\frac{5}{8}$

9) Ordenar en forma creciente los siguientes números racionales:

a) $\frac{3}{8}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{3}{8}$ y $-\frac{3}{4}$.

b) $1\frac{1}{2}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{5}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; 0 y $-\frac{5}{4}$.

Densidad

Podemos ver que $\frac{4}{5}$ es menor que $\frac{5}{6}$ porque $4.6 < 5.5 \Rightarrow 24 < 25$.

Pero ¿hay una fracción entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$?

$\frac{4}{5} = \frac{24}{30} = \frac{48}{60}$ y $\frac{5}{6} = \frac{25}{30} = \frac{50}{60}$ Entre $\frac{48}{60}$ y $\frac{50}{60}$ hay por lo menos una fracción, ¿cuál es?

Hay otra forma de encontrar una fracción entre otras dos. Utilizando la siguiente propiedad:

Si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} < \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ entonces $\boldsymbol{\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}}$.

Ejemplo 1: $\frac{2}{3} < \frac{7}{8}$ para encontrar una fracción entre ellas dos, hacemos lo siguiente: $\frac{2+7}{3+8} = \frac{9}{11}$.

Finalmente, $\frac{9}{11}$ es una fracción que se encuentra entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{8}$, o sea: $\frac{2}{3} < \frac{9}{11} < \frac{7}{8}$.

Ejemplo 2: $-\frac{3}{7} > -\frac{4}{5}$ para hallar una fracción entre ellas, hacemos lo siguiente: $\frac{(-3)+(-4)}{7+5} = \frac{-7}{12} = -\frac{7}{12}$. Luego, $-\frac{7}{12}$ es una fracción que se encuentra entre $-\frac{3}{7}$ y $-\frac{4}{5}$, o sea: $-\frac{3}{7} > -\frac{7}{12} > -\frac{4}{5}$.

- **Entre dos números racionales siempre hay otro número racional. Esta propiedad de los números racionales se llama *densidad*.**
- **Los números enteros no tienen esta propiedad: por ejemplo, no hay ningún entero entre 6 y 7, ni entre -5 y -4.**

10) Encontrar un número racional comprendido entre:

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{11}{12}$ b) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ y 1 d) $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$

e) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ f) $\frac{8}{3}$ y $\frac{11}{4}$ g) $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{5}$ h) 1 y $1\frac{3}{4}$

11) Utilizar la propiedad anterior para encontrar tres números racionales entre:

a) $\frac{5}{6}$ y $\frac{6}{7}$ b) $\frac{8}{3}$ y $\frac{11}{4}$ c) $-\frac{4}{3}$ y $-\frac{5}{4}$

Suma y resta de números racionales

• **Si los denominadores son iguales:** $\boldsymbol{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}}$ $\boldsymbol{\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}}$ Se mantiene el denominador y se suman o restan los numeradores.	Ejemplos: $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$ $\frac{7}{3} - \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7-5+4}{3} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2$.
• **Si los denominadores son distintos:** Se reemplazan las fracciones por otras que tengan igual denominador y sean equivalentes a ellas. Se puede usar cualquier múltiplo común, pero es conveniente elegir como denominador común el menor de los múltiplos comunes.	Ejemplos: $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2.5}{3.5} + \frac{1.3}{5.3} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$ $\frac{7}{6} - \frac{3}{4} = \frac{7.2}{6.2} - \frac{3.3}{4.3} = \frac{14}{12} - \frac{9}{12} = \frac{5}{12}$

Existe otra forma de sumar y/o restar fracciones de distinto denominador. Supongamos que tenemos que realizar la siguiente operación: $\frac{4}{3} - \frac{7}{5} + \frac{1}{2}$.

Primero buscamos el mínimo común múltiplo entre los denominadores 3, 5 y 2, en este caso es 30. Y Luego procedemos de la siguiente manera:

$10.4 = 40$

$$\frac{4}{3} - \frac{7}{5} + \frac{1}{2} = \frac{40 - 42 + 15}{30} = \frac{13}{30}$$

$30:3 = 10$

11) Resolver las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$	c) $\frac{7}{8} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) =$	e) $\frac{10}{3} + \left(\frac{7}{6} - \frac{5}{2}\right) =$
b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{2} + \frac{5}{3} =$	d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$	f) $\frac{7}{9} + \frac{9}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15} =$

12) Un empresario depositó $\frac{1}{4}$ de las ganancias del mes pasado en el banco, gastó $\frac{1}{10}$ en la compra de acciones y el resto lo invirtió en la empresa.

a) ¿Qué parte del total de las ganancias depositó y gastó en acciones?
b) ¿Qué parte de las ganancias del mes pasado invirtió en la empresa?

13) De su sueldo, este mes, el Sr. López gastó $\frac{1}{3}$ la primera semana, $\frac{1}{4}$ la segunda y $\frac{1}{6}$ la tercera.

a) ¿Qué parte de su sueldo gastó hasta ahora?
b) ¿Qué parte de su sueldo le queda sin gastar?
c) Si su sueldo total es de \$18144. ¿Cuánto gastó cada semana y cuánto le queda?

Multiplicación de números racionales

Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}}$$

Ejemplos: $\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6.2}{5.9} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$.

$\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{7} = \frac{(-3).5}{4.7} = \frac{-15}{28} = -\frac{15}{28}$.

$\left(-\frac{3}{4}\right) .\ 5 = \frac{(-3).5}{4} = \frac{-15}{4} = -\frac{15}{4}$.

$\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{(-3).(-7)}{5.2} = \frac{21}{10}$.

$(-2) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{(-2).(-5)}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

14) Resolver las siguientes operaciones y expresar el resultado como una fracción irreducible:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} =$ c) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{8}{9}\right) =$ e) $\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{7}\right) =$ g) $\left(-\frac{7}{4}\right) \cdot \frac{5}{9} =$

b) $\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) =$ d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{8} =$ f) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{5}\right) =$ h) $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{5} =$

15) ¿Por qué número tengo que multiplicar a $\frac{2}{3}$ para que se convierta en $\frac{5}{8}$?

Inverso de un número racional

- **El inverso de una fracción distinta de cero se obtiene intercambiando el numerador con el denominador.**
- **El producto de un número por su inverso es igual a 1.**
- **Dado $\frac{a}{b}$, con $a \neq 0$ $\quad \frac{b}{a}$ es el inverso de $\frac{a}{b}$ $\quad$ y $\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.**

16) Hallar los inversos de los siguientes números racionales:

a) $\frac{3}{5}$ $\quad$ b) $-\frac{7}{4}$ $\quad$ c) $\frac{15}{9}$ $\quad$ d) $-\left(-\frac{4}{17}\right)$ $\quad$ e) 8 $\quad$ f) $\frac{1}{3}$

División de números racionales

Para dividir una fracción por otra fracción distinta de cero, se multiplica la primera por el inverso de la segunda.

$$\boxed{\text{Si } c \neq 0 \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}}$$

Ejemplos: $\frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7.4}{3.5} = \frac{28}{15}$.

$\left(-\frac{3}{4}\right) : \frac{5}{7} = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{5} = \frac{(-3).7}{4.5} = \frac{-21}{20}$.

$\left(-\frac{3}{4}\right) : 5 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{(-3).1}{4.5} = \frac{-3}{20} = -\frac{3}{20}$.

$\left(-\frac{1}{9}\right) : \left(-\frac{8}{5}\right) = \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{(-1).(-5)}{9.8} = \frac{5}{72}$.

$(-7) : \left(-\frac{2}{3}\right) = (-7) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{(-7).(-3)}{2} = \frac{21}{2}$.

Muchas veces, para simplificar pasos, se dice que para dividir dos fracciones se debe multiplicar "cruzado", esto es numerador de la primera con denominador de la segunda y denominador de la primera con numerador de la segunda.

Ejemplos: $\frac{8}{3} : \frac{5}{11} = \frac{8.11}{3.5} = \frac{88}{15}$ $\qquad$ $\left(-\frac{7}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{(-7).3}{4.2} = \frac{-21}{8}$

17) Resolver las siguientes operaciones y expresar el resultado como una fracción irreducible:

a) $\frac{7}{4} : \frac{3}{10} =$ $\quad$ b) $\left(-\frac{12}{11}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right) =$ $\quad$ c) $\frac{15}{14} : \left(-\frac{10}{7}\right) =$ $\quad$ d) $\left(-\frac{9}{5}\right) : 3 =$

Simplificación de fracciones previo a multiplicar y dividir

Muchas veces es conveniente simplificar las fracciones antes de hacer las operaciones ya que esto hace que se opere con números más pequeños y las cuentas sean más simples.

Simplificación previa en la multiplicación	**Simplificación previa en la división**
Se puede simplificar numerador y denominador de cada fracción por separado o numerador de una con denominador de la otra. "Simplificación Moño"	Se puede simplificar numerador y denominador de cada fracción por separado o numeradores de una con numerador de la otra y/o denominador de una con denominador de la otra. "Simplificación Rectángulo"
Ejemplo: $\frac{63}{38} \cdot \frac{14}{21} = \frac{\overset{3}{\cancel{63}}}{\underset{9}{\cancel{36}}} \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{21}}} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1.4}{3.1} = \frac{4}{3}$	Ejemplo: $\frac{30}{21} : \frac{60}{24} = \frac{\overset{1}{\cancel{30}}}{\underset{7}{\cancel{21}}} : \frac{\overset{2}{\cancel{60}}}{\underset{8}{\cancel{24}}} = \frac{1}{7} : \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{1.4}{7.1} = \frac{4}{7}$

18) Resolver las siguientes operaciones y expresar el resultado como una fracción irreducible:

a) $\frac{75}{34} : \frac{25}{17} =$ $\quad$ b) $\left(-\frac{36}{90}\right) \cdot \left(-\frac{45}{28}\right) =$ $\quad$ c) $\frac{150}{48} : \left(-\frac{50}{64}\right) =$ $\quad$ d) $\left(-\frac{33}{80}\right) \cdot \frac{40}{99} =$

Potenciación de fracciones

Calculamos:

$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2.2.2}{5.5.5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right).\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{(-3).(-3)}{4.4} = \frac{(-3)^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Para elevar una fracción a la *n*, se elevan el numerador y el denominador a la *n*:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

19) Calcular las siguientes potencias:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ c) $\left(-\frac{4}{7}\right)^3$ d) $\left(-\frac{7}{9}\right)^2$ e) $\left(\frac{10}{3}\right)^4$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

La potencia de exponente –*n* (*n* ∈ ℕ) de una fracción distinta de cero es igual a la potencia de exponente *n* de su inverso.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

Si *n* ∈ ℕ y *a* ≠ 0.

Ejemplos:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$. $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. $7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$.

20) Calcular las siguientes potencias.

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$	b) $\left(-\frac{6}{7}\right)^2$	c) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$	d) $\left(\frac{9}{10}\right)^2$	e) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}$
f) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$	g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^0$	h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	i) $(-6)^{-2}$	j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$
k) $\left(\frac{8}{11}\right)^2$	l) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$	m) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{-1}$	n) $\left(\frac{12}{15}\right)^2$	o) $\left(\frac{12}{13}\right)^{-2}$

21) Calcular las potencias $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ para n igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5 g) 6 h) 7 i) 8 j) 9 k) 10

¿Qué signo tienen las potencias cuando n es par? ¿Y cuando n es impar?

22) Unir con flechas las expresiones que son iguales:

$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}\right)^6$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\left(\frac{3}{4}\right)^8 . \left(\frac{3}{4}\right)^{-6}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-14}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^7 : \left(\frac{1}{5}\right)^9$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-7}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^6 . \left(\frac{1}{5}\right)^6$

Radicación de fracciones

Calculamos:

$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ porque $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$. Como $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{25} = 5$, entonces $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$ porque $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{2^3} = -\frac{1}{8}$. Como $\sqrt[3]{-1} = -1$ y $\sqrt[3]{8} = 2$, entonces $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{8}}$

Para hallar la raíz de índice n de una fracción, se hallan la raíz de índice n del numerador y la raíz de índice n del denominador:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Ejemplos: a) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$ b) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3}$ c) $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$

23) Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} =$ d) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} =$ g) $\sqrt[3]{-\frac{8}{343}} =$ j) $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} =$ m) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}} =$

b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} =$ e) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} =$ h) $\sqrt{\frac{9}{4}} =$ k) $\sqrt{\frac{121}{400}} =$ n) $\sqrt{\frac{144}{169}} =$

c) $\sqrt{\frac{36}{49}} =$ f) $\sqrt{\frac{64}{81}} =$ i) $\sqrt{-\frac{4}{9}} =$ l) $\sqrt{-\frac{300}{49}} =$ o) $\sqrt[3]{-\frac{1}{1000}}$

Propiedades de la radicación

Propiedad distributiva	Ejemplos
Si $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ y $\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ tienen solución, entonces: • $\sqrt[n]{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ • $\sqrt[n]{\frac{a}{b} : \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} : \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{27} \cdot \frac{64}{343}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$. $\sqrt{\frac{9}{4} : \frac{25}{81}} = \sqrt{\frac{9}{4}} : \sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{3}{2} : \frac{5}{9} = \frac{27}{10}$.

24) Resolver aplicando propiedades cuando sea posible:

a) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} =$ d) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8} : \frac{1}{64}} =$ g) $\sqrt{1 + \frac{11}{25}} =$

b) $\sqrt{1 - \frac{5}{9}} =$ e) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{4}{9}} =$ h) $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}} : \sqrt[3]{-\frac{27}{64}} =$

c) $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9}} =$ f) $\sqrt{\frac{36}{25} \cdot \frac{100}{9}} =$ i) $\sqrt{\frac{100}{49} \cdot \frac{900}{121}} =$

Operaciones combinadas con números racionales

Las operaciones combinadas con números racionales se resuelven respetando la misma jerarquía que las operaciones con números enteros.

Ejemplo: $\sqrt{\frac{1}{4}} : \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3}\right) =$	Cálculos auxiliares
Separar en términos: $\sqrt{\frac{1}{4}} : \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3}\right) =$	$\sqrt{\frac{1}{4}} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1.5}{2.3} = \frac{5}{6}$
Resolver cada término por separado: $\frac{5}{6} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{11}{12}\right) =$	$-\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-4}{20} = -\frac{1}{5}$ $\frac{5}{4} - \frac{1}{3} = \frac{15-4}{12} = \frac{11}{12}$
Resolver las sumas y restas: $\frac{5}{6} - \frac{1}{5} + \frac{11}{20} = \frac{50-12+33}{60} = \frac{71}{60}.$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{11}{12} = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}.$

25) Resolver las siguientes operaciones combinadas:

a) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{49}{16}} + \frac{5}{3} : \left(-\frac{8}{7}\right) =$

b) $\left(\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{64}}\right) : \left(\frac{7}{6} - \frac{5}{4}\right) =$

c) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{2} : \left(-\frac{50}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 =$

d) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{27}{25} : \left(-\frac{9}{5}\right) - \frac{7}{15} =$

e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} - \frac{20}{7} \cdot \left(-\frac{14}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} =$

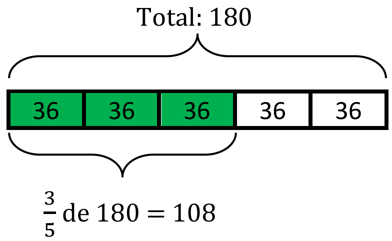
f) $\left(-\frac{7}{3}\right)^{-2} - \frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{10}{21}\right) + (-7)^{-1} \cdot \sqrt{\frac{25}{49}} =$

Problemas con números racionales

Antes de empezar a resolver problemas, veamos algunas cosas que pueden ser útiles.

- **¿Cómo calcular la fracción de una determinada cantidad?**

Vamos a suponer que debemos calcular $\frac{3}{5}$ de 180. Esto es, tomar 3 partes de 5 en total:



- Una forma de hacer esto es, dividir 180 en cinco partes y luego multiplicar el resultado por 3:
  (180 : 5). 3 = 36 . 3 = 108.
  Esto significa que cada parte vale 36 y si tomamos 3 de esas partes, obtenemos 108.
- Otra forma de calcular es multiplicar $\frac{3}{5}$ por 180:
  $\frac{3}{5} \cdot 180 = \frac{3\,.\,180}{5} = \frac{540}{5} = 108$.

- **Cuando tenemos varias fracciones de una cantidad y debemos saber qué fracción representa el resto.**

  Supongamos que un señor tiene \$16.500, gasta $\frac{3}{5}$ en el supermercado, $\frac{3}{10}$ en ropa y ahorra el resto.

  a) ¿Qué parte del dinero gastó? Para saber que parte gastó, debemos sumar las dos partes que gastó, o sea: $\frac{3}{5} + \frac{3}{10} = \frac{6+3}{10} = \frac{9}{10}$. Esto significa que gastó $\frac{9}{10}$ de su dinero.

  b) ¿Qué parte del dinero ahorró? Que haya gastado en total $\frac{9}{10}$ de su dinero, significa que de 10 partes gastó 9, por lo tanto, le queda 1 parte de 10. Finalmente ahorró $\frac{1}{10}$ de su dinero.

  c) ¿Cuánto dinero gastó en el supermercado? Aquí debemos calcular $\frac{3}{5}$ de \$16500. O sea:
  (\$16500 : 5) . 3 = \$9900.

  d) ¿Cuánto dinero gastó en ropa? Aquí debemos calcular $\frac{3}{10}$ de \$16500. O sea:
  (\$16500 : 10) . 3 = \$4950.

  e) ¿Cuánto dinero ahorró? Aquí podemos hacer dos cosas:
  - Calcular $\frac{1}{10}$ de \$16500: (\$16500 : 10) . 1 = \$1650.
  - Sumar lo que gastó en supermercado y ropa y restar ese resultado al total:
  \$16500 – (\$9900 + \$4950) = \$16500 – \$14850 = \$1650.

26) Un padre reparte entre sus hijos \$1800. Al mayor le da $\frac{4}{9}$ de esa cantidad, al mediano $\frac{1}{3}$ y al menor el resto. a) ¿Qué cantidad recibió cada uno? b) ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

27) En un depósito había 3000 litros de agua y estaba lleno. El primer día se gastó $\frac{5}{8}$ del depósito y el segundo día se gastó $\frac{3}{10}$ del total.

a. ¿Cuántos litros de agua se gastó cada día?
b. ¿Cuántos litros de agua quedan?
c. ¿Qué fracción del total queda en el depósito?

28) En las elecciones locales celebradas en un pueblo, $\frac{3}{11}$ de los votos fueron para el partido A, $\frac{3}{10}$ para el partido B, $\frac{5}{14}$ para el partido C y el resto para el partido D. El total de votos fue de 15400.

a. ¿Qué cantidad de votos obtuvo cada partido?
b. ¿Qué fracción (con respecto del total) representa los votos obtenidos por el partido D?

29) Tengo que vender 40 libros de poesía en 3 días. El primer día vendo $\frac{1}{2}$ del total de libros, el segundo día vendo $\frac{1}{5}$ de los que me quedan. ¿Cuántos libros tengo que vender el tercer día?

30) Dos automóviles A y B hacen un mismo trayecto de 572km. El automóvil A lleva recorridos $\frac{5}{11}$ del trayecto cuando el B ha recorrido los $\frac{6}{13}$ del mismo.

a. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos cada uno?
b. ¿Cuál de los dos va primero?
c. ¿Cuántos kilómetros le falta recorrer a cada uno?

31) Un comerciante compró un rollo de tela a $36 el metro. Al lavarla perdió un cuarto de su longitud. Después de lavada, la vendió a $60 el metro. Por la venta de todo el rollo ganó $576. ¿Cuántos metros de tela tenía el rollo que compró?

32) Ani y Beti tenían algunos ahorros. Este mes cada una gastó una parte.
Ani gastó $\frac{2}{3}$ de sus ahorros y le quedaron $36. Beti gastó $\frac{3}{4}$ de sus ahorros.
Si el mes pasado tenían entre las dos $280, ¿cuántos pesos le quedaron a Beti?

33) Si hoy Juan compra un celular paga sólo $\frac{11}{15}$ del precio de lista y puede hacerlo en 3 cuotas de $5335 cada una. ¿Cuántos pesos ahorra Juan si compra el celular hoy?

34) Los $\frac{4}{7}$ de los pasajeros de un tren turístico son extranjeros. Hay 72 pasajeros argentinos. Los extranjeros ocupan las $\frac{3}{8}$ partes de los asientos del tren.
¿Cuántos asientos tiene el tren?

35) De los socios del club los $\frac{7}{8}$ se anotaron para ir a la cena de fin de año, pero $\frac{1}{4}$ de los anotados no fueron a la cena. Si había 315 socios en la cena, ¿cuántos socios se anotaron para la cena?, ¿cuántos socios tiene el club?

36) En el colegio hay 1360 alumnos inscriptos.
De los alumnos inscriptos, $\frac{3}{5}$ se anotaron en el turno mañana.
De los alumnos del turno mañana, $\frac{1}{4}$ van al jardín, $\frac{2}{3}$ van a la primaria y los demás van a la secundaria. ¿Cuántos alumnos van a la secundaria en el turno mañana?

Transformación de número decimal a fracción

Decimales finitos	Decimales periódicos puros	Decimales periódicos mixtos
En el numerador: Se escribe todo el número sin la coma. En el denominador: Se escribe un 1 y luego tantos ceros como números haya después de la coma. Ejemplo 1: $5{,}23 = \frac{523}{100}$ Ejemplo 2: $0{,}7 = \frac{7}{10}$ Ejemplo 3: $17{,}711 = \frac{17711}{1000}$	En el numerador: Se escribe todo el número sin la coma ni el arco y luego se resta todo lo que no está debajo del arco. En el denominador: Se escribe un 9 por cada número que haya después de la coma y se encuentre debajo del arco. Ejemplo 1: $3,\widehat{6} = \frac{36-3}{9} = \frac{33}{9}$ Ejemplo 2: $1,\overset{\frown}{342} = \frac{1342-1}{999} = \frac{1341}{999}$.	En el numerador: Se escribe todo el número sin la coma ni el arco y luego se resta todo lo que no está debajo del arco. En el denominador: En cuanto a lo que se encuentra después de coma, se escribe un 9 por cada número que se encuentre debajo del arco y un cero por cada número que no esté debajo del arco. Ejemplo: $2{,}5\overset{\frown}{78} = \frac{2578-25}{990} = \frac{2553}{990}$.

37) Pasar los siguientes números decimales a fracción:

a) $2,\overset{\frown}{63}$ =

e) $60,\overset{\frown}{7}$ =

i) $1{,}00\overset{\frown}{2}$ =

b) $0,\overset{\frown}{5}$ =

f) $0,\overset{\frown}{56}$ =

j) $-3,\overset{\frown}{7}$ =

c) 5,23 =

g) $-5{,}23$ =

k) 62,1 =

d) $0{,}1\overset{\frown}{45}$ =

h) $1{,}04\overset{\frown}{37}$ =

l) $40{,}0\overset{\frown}{6}$ =

38) Pasar los números decimales a fracción y resolver las siguientes operaciones:

a. $0,\overset{\frown}{1} + 3,\overset{\frown}{8} =$

b. $3{,}4\overset{\frown}{8} - 2{,}4\overset{\frown}{6} - 0{,}0\overset{\frown}{2} =$

c. $1{,}2 + 2{,}5 - 2,\overset{\frown}{4} - 5,\overset{\frown}{5} =$

d. $3{,}6 + \frac{1}{10} - 0{,}3 =$

e. $0,\overset{\frown}{11} \,.\, 2 + 3 \,.\, 0,\overset{\frown}{3} - \frac{2}{9} \,.\, 4 =$

f. $\frac{3}{5} + 5{,}2 - 0{,}22 + \frac{9}{10} =$

g. $0{,}3 + \frac{2}{5} - \frac{7}{30} =$

Operaciones con números decimales

Suma y resta: Para sumar o restar dos o más números decimales, hay que ordenarlos en columnas haciendo coincidir las comas. Después se suman o restan como si fuesen números naturales (de derecha a izquierda) y se pone la coma en el resultado, bajo la columna de las comas.

Ejemplo 1: 52,35 + 12,87

$$\begin{array}{r} 52{,}35 \\ +\ 12{,}87 \\ \hline 65{,}22 \end{array}$$

Ejemplo 2: 36,58 − 4,7

$$\begin{array}{r} 36{,}58 \\ -\ 4{,}70 \\ \hline 31{,}88 \end{array}$$

Multiplicación de números decimales: Se debe realizar la multiplicación como si no hubiera decimales. Luego, en el resultado o producto se pondrá la coma, comenzando a contar por la derecha, tantas cifras decimales como había en los dos números juntos.

Ejemplo: 13,42 . 5,1

```
   13,42  ←  2 cifras decimales
   x 5,1  ←  1 cifra decimal
 -------
+  1342
  6710–
 -------
 68,442  ←  3 cifras decimales
```

División de números decimales

- **División de un decimal por un entero:** Dividir como si fueran dos números enteros. Cuando se llega a la coma decimal, ésta debe agregarse en el cociente y seguir dividiendo hasta terminar con todas las cifras del dividendo.
  Ejemplo: 18,45 : 3

```
18,45 |_3___
  04   6,15
   15
    0
```

- **División de un entero por un decimal:** Se deben multiplicar ambos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor, y después se hace la división obtenida. Esto es equivalente a correr la coma la misma cantidad de lugares en ambos números hasta que el divisor quede entero.
  Ejemplo: 570 : 1,2   es equivalente a (570.10) : (1,2 . 10) = 5700 : 12:

```
5700 |_12___
 90   475
   60
    0
```

- **División de un decimal por un decimal:** Se deben multiplicar ambos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga **el divisor**, y después se hace la división obtenida. Esto equivale a correr la coma la misma cantidad de lugares en ambos números hasta que el divisor quede entero.
  Ejemplo: 61,0212 : 2,41   es equivalente a (61,0212.100) : (2,41 . 100) = 6102,12 : 241:

```
6102,12 |_241___
1282      25,32
   771
    482
      0
```

39) Resolver las siguientes operaciones con decimales:

a) 587,12 + 13,46	d) 12,2 . 1,3	g) 246,24 : 3
b) 34,12 – 1,74	e) 0,38 . 2,5	h) 10534 : 2,3
c) 1,02 + 39,542	f) 14,3 . 3,2	i) 15,232 : 6,4

Notación científica

La notación científica es una abreviación matemática, basada en la idea de que es más fácil leer un exponente que contar muchos ceros en un número. Números muy grandes o muy pequeños necesitan menos espacio cuando son escritos en notación científica ya que se escribe un número mayor o igual que 1 y menor que diez, por una potencia de 10.

Números muy grandes

380 000 000 = $3{,}8 \,.\, 10^{8}$

8 7 6 5 4 3 2 1

12 500 000 = $1{,}25 \,.\, 10^{7}$

7 6 5 4 3 2 1

Números muy pequeños

0,00000042 = $4{,}2 \,.\, 10^{-7}$

1 2 3 4 5 6 7

0,000137 = $1{,}37 \,.\, 10^{-4}$

1 2 3 4

40) Pasar los siguientes números a notación científica:

a) 45 000 000 000 =

b) 0,00000000367 =

c) 8 234 000 000 000 =

d) 83 200 000 =

e) 123 000 000 =

f) 0,00004792 =

g) 1 254 000 000 000 000 =

h) 0,00000027 =

i) 0,0000005 =

j) 57 000 000 =

k) 0,0000000008 =

41) Pasar los números a notación científica y luego realizar las operaciones:

a) 47 000 000 . 1 200 000 000 000 =

b) 0,000000464 : 1450 000 000 =

c) 519 000 000 : 0,00000346=

d) 3 800 000 . 0,0000245=

e) 840 000 000 : 0,0000024 =

f) 0,0000636 . 0,00000012 =

g) (450 000 000 . 0,000068) : 60 000 000 =

h) (630 000 000 . 0,000048) : 40 000 000 =

Ecuaciones

- **Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones, denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.**
  Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretenden hallar. Por ejemplo, en la ecuación $x + 8 = 20$, se pretende hallar el valor de la letra x que, en este caso, es fácil deducir que será $x = 12$.

Apuntes para la resolución de ecuaciones lineales

1) Resolver mentalmente las siguientes ecuaciones:

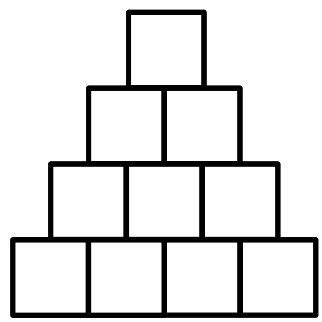
a) $x + 6 = 36$	e) $4 + 3.m = 22$	i) $2.p + 1 = -9$
b) $x - 2 = 4$	f) $5.k + 12 = 17$	j) $4 - t = 5$
c) $2.x + 3 = 13$	g) $18 + 3 = f - 2$	k) $r + 8 = 0$
d) $4.x - 15 = 5$	h) $r + 3 = -10$	l) $7.h + 14 = 0$

2) Resolver las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita:

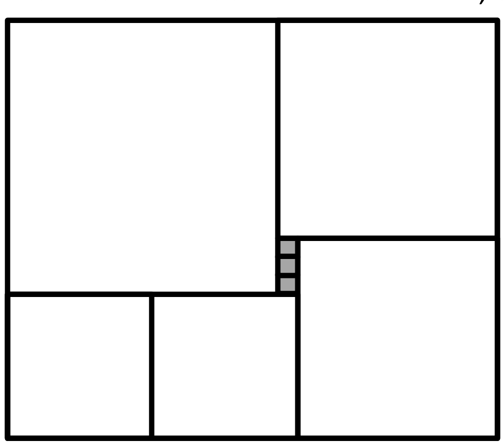
a) $6x - 18 = 2x + 24$	f) $3x + 24 + x - 6 = 38$
b) $8w + 2 = -26 - 6w$	g) $-5 + 8y + 9 = 5y + 61$
c) $-4t + 5 + 7t = 32$	h) $8v + 6v - v + 4 = 2v + 59$
d) $28 + 4z = 10z - 2$	i) $12 + m - 9m = -2m + 30$
e) $14 + 12x = 28$	j) $-6t - 4 = -2t - 26$

3) Escribir un número en cada casilla para que se verifiquen las siguientes condiciones:

- En cada casilla de la fila inferior, excepto la primera, el número sea el doble que el de la casilla de su izquierda.
- En las demás casillas, cada número sea igual a la suma de los dos números de las casillas de la fila inmediata inferior que la tocan.
- La suma de los 10 números escritos sea igual a 2070.



4) Se tiene un rectángulo dividido en 8 cuadrados de lados enteros, como se muestra en la figura.



Los dos cuadrados sobre el lado inferior (a la izquierda) son iguales; los tres cuadraditos sombreados tienen lado 1. Calcular los lados de todos los cuadrados de la subdivisión.

Ecuaciones donde interviene la propiedad distributiva

5) Resolver las siguientes ecuaciones lineales con una incógnita:

a) $7.(2x - 3) = 7$

b) $4.(x + 2) = -40$

c) $-5.(x + 4) = 4x + 7$

d) $3 + 5.(x - 1) = 48$

e) $(8x + 24):4 = 30$

f) $2.(x + 8) + 3 = -4x + 31$

g) $8.(2 + x) - 6 = 3.(2x + 8)$

h) $14x + 2 - (5x - 3) = 23$

i) $(27x - 15):3 = (8x + 10):2$

j) $4.(3x - 2) = (30x + 30):3$

Propiedad distributiva	
Ejemplo 1: $2.(4x + 6)$ $2.4x + 2.6$ $8.x + 12$	Ejemplo 4: $(9x + 18):3$ $9x:3 + 18:3$ $3.x + 6$
Ejemplo 2: $3.(-7x + 2)$ $3.(-7x) + 3.2$ $-21x + 6$	Ejemplo 5: $(-6x + 4):(-2)$ $-6x:(-2) + 4:(-2)$ $3.x - 2$
Ejemplo 3: $-5.(x - 1)$ $-5.x - 5.(-1)$ $-5.x + 5$	Ejemplo 6: $(-14x - 7):(-7)$ $-14x:(-7) - 7:(-7)$ $2.x + 1$

Ecuaciones con potencias y raíces

6) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $4.x^2 + 12 = 48$

b) $5.x^3 - 8 = 32$

c) $8.\sqrt{x} + 23 = 55$

d) $10.\sqrt[3]{x} + 1 = 21$

e) $8.x^2 + 2 = -2x^2 + 252$

f) $7.\sqrt{x} + 15 - 2.\sqrt{x} = 60$

g) $7.\sqrt[4]{x} - 17 = -7 + 2.\sqrt[4]{x}$

h) $12.\sqrt[3]{x} + 40 = 16$

i) $\sqrt{3.x + 13} = 7$

j) $\sqrt[3]{4.x^2 + 25} = 5$

k) $\sqrt[4]{3.x^3 + 57} = 3$

l) $\sqrt[3]{5.x^2 - 16} + 18 = 22$

7) Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

a) Si al doble de un número le restas 15, obtienes 35. ¿Cuál es el número?

b) Si al cuádruple de un número le sumo 2, resulta lo mismo que si al triple del número le resto 3. ¿Qué número es?

c) Sumando el doble y el triple de un número y luego restando 8, se obtiene 122. ¿De qué número se trata?

d) Si al triple de un número se le suma 28, se obtiene el quíntuplo del número menos 4. ¿Qué número es?

Apuntes para la resolución de problemas con ecuaciones lineales

- Un número:
- El doble de un número:
- El triple de un número:
- El consecutivo de un número:
- El anterior de un número:
- El cuadrado de un número:
- El cubo de un número:
- El doble del consecutivo de un número:

e) Si al doble del consecutivo de un número le restamos 9 obtenemos el número más 3. ¿Qué número es?

f) La suma de tres números consecutivos es igual a 396, ¿cuáles son los números?

g) La suma de dos números pares consecutivos es 98. ¿Qué números son?

h) La base de un rectángulo es el triple que su altura. Si su perímetro es 280cm, ¿cuánto miden la base y la altura?

i) La base de un rectángulo es 5cm más larga que la altura, y su perímetro es 226cm. Calcular el valor de la base y de la altura.

j) El perímetro de un triángulo isósceles es 34cm y el lado desigual mide 2cm menos que cada uno de los lados iguales. Calcula la medida de cada lado.

k) En un triángulo isósceles, la base mide la mitad que uno de los lados iguales, y el perímetro es 55cm. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

l) Las edades de Juan, Carmela y Rosa suman 39 años. Carmela tiene cinco años menos que Juan y dos más que Rosa. ¿Cuál es la edad de cada uno?

m) Tres hermanos se reparten $1300. El mayor recibe el doble que el mediano y éste el cuádruplo que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

8) Unir con flechas el enunciado con la ecuación que me permitiría resolver el problema:

a) El triple de un número más veinte es igual al número menos 14. ¿Cuál es el número?	1) $3.x + 20 = x - 1 - 14$
b) El triple de un número más veinte es igual al anterior del número menos 14. ¿Cuál es el número?	2) $3.x + 20 = 2x - 14$
c) El triple de un número más veinte es igual al doble del número menos 14. ¿Cuál es el número?	3) $3.x + 20 = x - 1 - 14$
d) Si al triple de un número le sumo veinte, es lo mismo que si al anterior de un número le restara 14. ¿Cuál es el número?	4) $3.x + 20 = x - 14$

9) Esta mañana, el tren que va al aeropuerto salió vacío de la estación.
En el camino, el tren hizo 6 paradas y llegó al aeropuerto con 219 pasajeros.
En la primera parada subieron algunos pasajeros.
En cada parada, a partir de la segunda, subió un pasajero menos que en la parada anterior.
Ningún pasajero se bajó antes de llegar al aeropuerto.
¿Cuántos pasajeros subieron en la última parada?

10) En unas recientes elecciones en la que hubo 5219 votos y cuatro candidatos, el ganador superó a sus oponentes por 22, 30 y 73 votos, pero por un error administrativo, se perdió la hoja de resumen con los votos totales que obtuvo cada uno de ellos. ¿Cuántos votos obtuvo cada uno de los candidatos?

11) -¡Qué bien, así que tienes cinco hijos, y la niña en el medio! – dijo Alfredo -. ¿Qué edad tiene ella?
- Es fácil saberlo – contestó Carlos con una sonrisa-. Nacieron rodos regularmente espaciados, cada dos años. La edad del mayor es el doble que la del menor.
¿Qué edad tiene la niña?

Geometría
Ángulos

1) Resolver las siguientes operaciones y clasificar el resultado según su nombre (agudo, obtuso, recto, etc.)

a) 169° 32' 18'' + 15° 46' 54''
b) 48° 21' 46'' + 123° 58' 37''
c) 125° 14' 38'' – 35° 14' 38''
d) 28° 35' 24'' – 12° 48' 56''
e) 12° 58' 56'' . 4
f) 14° 42' 52'' . 6
g) 27° 33' 40'' : 5
h) 28° 38' 36'' : 3

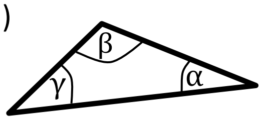
2) El ángulo suplementario de 69° 57' 42'' es ………………………………..

3) El ángulo complementario de 28° 47' 27'' es ……………………………..

4) 30° es el complemento de ……………. y 85° es el suplemento de …………………….

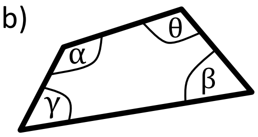
5) Dadas las siguientes figuras, hallar el valor del ángulo que falta:

a)



α = 26° 47' 18''
β = 107° 36' 52''

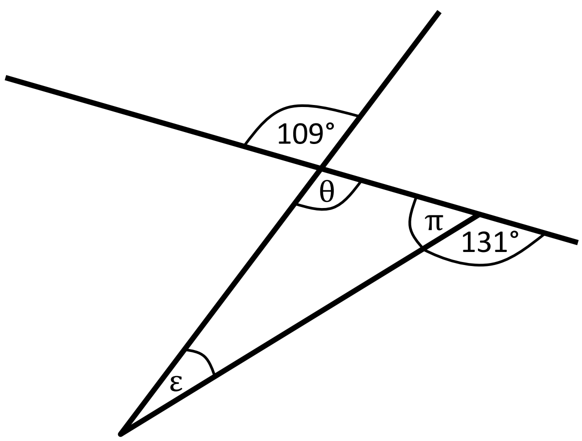
b)



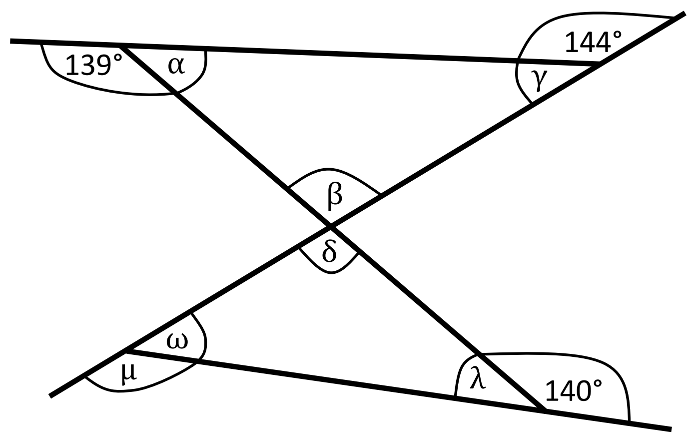
α = 128° 12' 28''
β = 66° 28' 40''
γ = 56° 42' 58''

6) Hallar el valor de todos los ángulos que faltan en las siguientes figuras:

a)

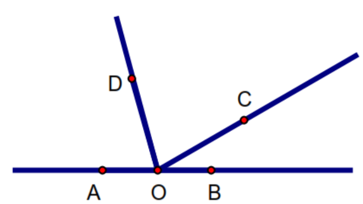


b)



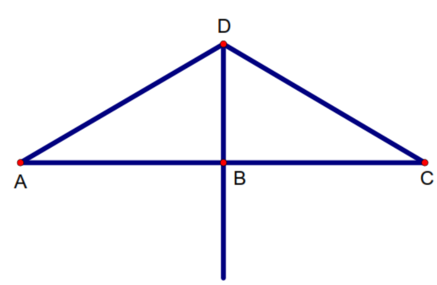
7) En la figura:
El ángulo $B\widehat{O}C$ mide 30° y la semirrecta OD es la bisectriz del ángulo $A\widehat{O}C$.
El ángulo $A\widehat{O}D$ mide:

a) 30° b) 35° c) 75° d) 60°

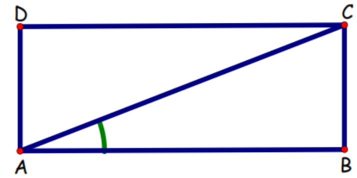


8) ACD es un triángulo isósceles.
DB es la bisectriz del ángulo D.
El ángulo A mide 30°.
Entonces el ángulo $B\widehat{D}C$ mide:

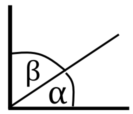
a) 60° b) 15° c) 30° d) 120°



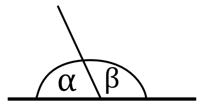
9) ABCD es un rectángulo y AC es una de sus diagonales.
El ángulo CAB mide 17°.
El ángulo ACB mide:
a) 70° b) 73° c) 45° d) 90°



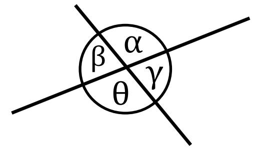
10) Hallar el valor de x y luego el valor de todos los ángulos que faltan:

a)


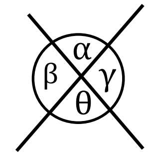
$\beta = 5x + 33°$
$\alpha = 2x + 15°$

b)


$\beta = 12x - 12°$
$\alpha = 3x + 27°$

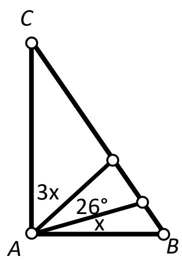
c)


$\beta = 9x - 11°$
$\alpha = 14x + 7°$

d)


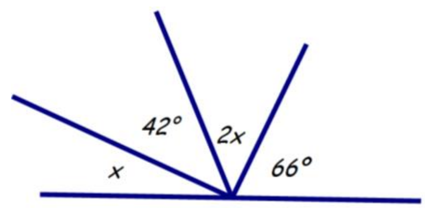
$\beta = 11x + 24°$
$\gamma = 8x + 45°$

11) En la figura,
ABC es un triángulo
rectángulo.



El ángulo *x* mide
a) 64° b) 16° c) 21° d) 32°

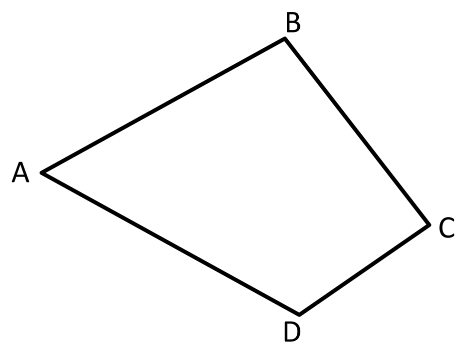
12)



En la figura, el ángulo x mide:
a) 20° b) 24° c) 21° d) 31°

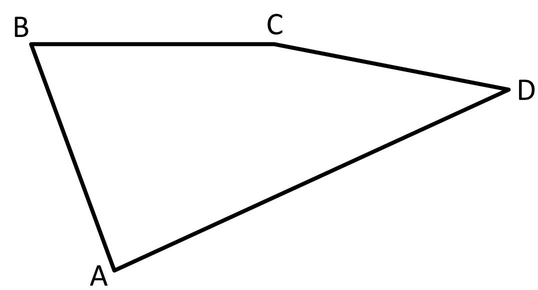
13) En el cuadrilátero *ABCD:*
AB = *AD*
$A\hat{B}D$ = 65°
$D\hat{B}C$ = 35°
La diagonal *BD* es bisectriz del ángulo $A\hat{D}C$.

Calcular las medidas de los ángulos del cuadrilátero *ABCD*.



14) En el cuadrilátero *ABCD:*
BC = CD
$A\hat{B}C = 70°$ y $B\hat{C}D$ = 170°.
Hay un punto E en el lado AD tal que $A\hat{B}E$ = 10° y CE = CD.

Calcular las medidas de los ángulos $B\hat{A}D$ y $A\hat{D}C$.

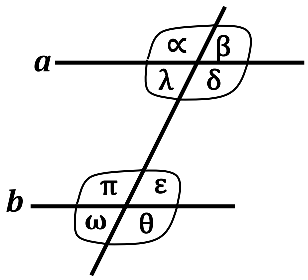


15) Sea *ABC* un triángulo isósceles, con *AC* = *BC*. Se construye el triángulo equilátero *BCD*, exterior al triángulo *ABC*. Si $C\hat{A}D$ = 40°, calcular los ángulos del cuadrilátero *ABDC*.

16) Se considera un cuadrado *ABCD* de lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, y un punto *P* exterior al cuadrado tal que el triángulo *ABP* es isósceles con *AP* = *AB* y $A\hat{D}P$ = 10°. Calcular la medida del ángulo $A\hat{P}B$.

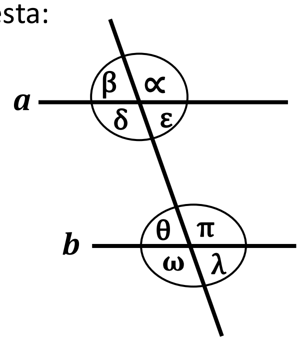
Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una transversal

1) Dada la siguiente figura: Hallar el valor de todos los ángulos que faltan, justificando la respuesta:



a* // *b
β = 64°

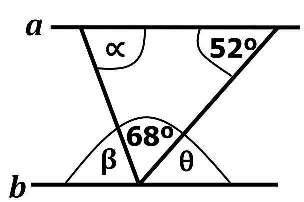
2) Dada la siguiente figura: Hallar el valor de x y luego el valor de todos los ángulos justificando la respuesta:



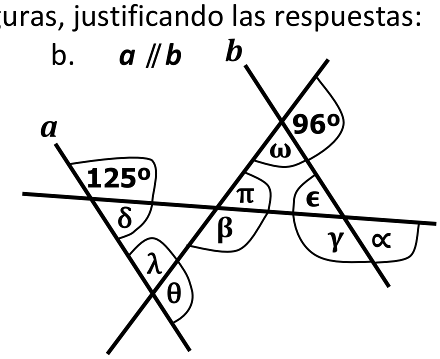
a* // *b
∝ = 8x + 47°
π = 3x + 92°

3) Hallar la medida de los ángulos que faltan en las siguientes figuras, justificando las respuestas:

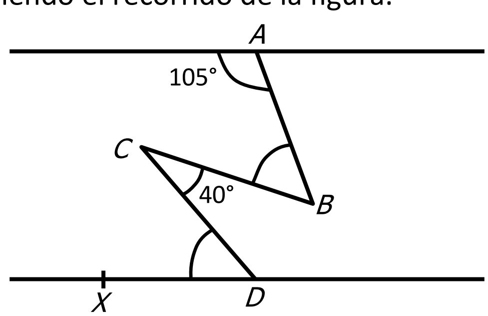
a. ***a* // *b***



b. ***a* // *b***

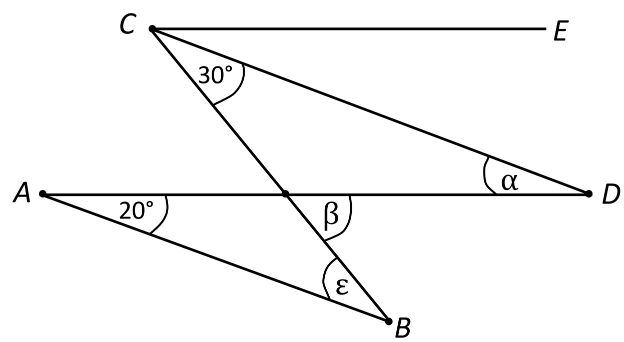


4) Un barco navega entre dos orillas paralelas, siguiendo el recorrido de la figura.



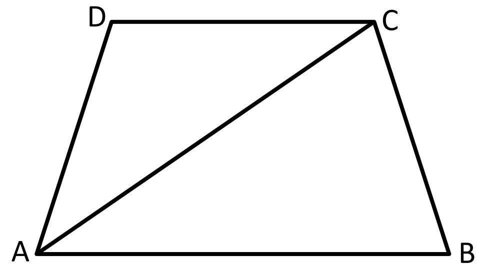
Se sabe que $A\hat{B}C = C\hat{D}X$ y $C\hat{B}D = C\hat{D}B$.
Calcular $A\hat{B}C$.

5) En la figura, AB ∥ CD y AD ∥ CE, ¿Cuánto miden los ángulos α, β y ε.

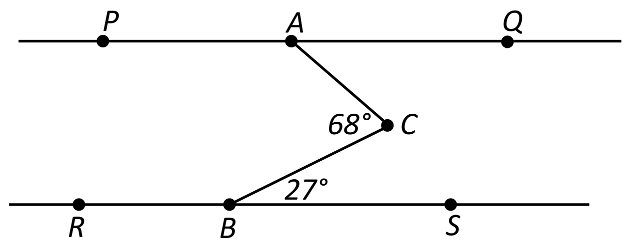


6) *ABCD es* un trapecio de bases *AB* y *CD*, con *AB* > *CD*, como se muestra en la figura.
Los lados AD y DC son iguales y además el lado *AB* es igual a la diagonal *AC*.
El ángulo $D\hat{C}A$ = 36°

Calcular las medidas de los ángulos del trapecio.



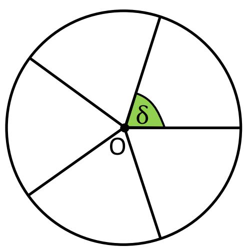
7) Las rectas *PQ* y *RS* son paralelas.
¿Cuál es el valor del ángulo $Q\hat{A}C$?



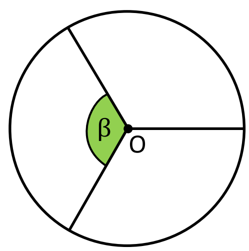
Ángulos en una circunferencia

1) Cada circunferencia de centro O se encuentra dividida en partes iguales. Determina la medida de cada ángulo central.

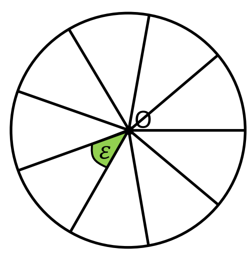
a)



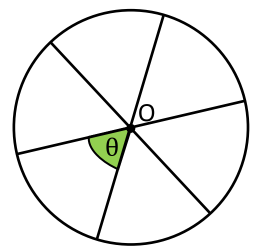
b)



c)

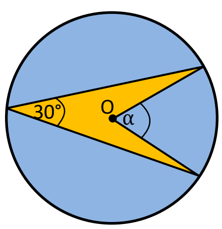


d)

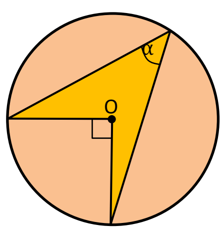


2) Hallar en cada caso el valor del ángulo ∝.

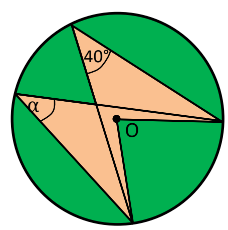
a)



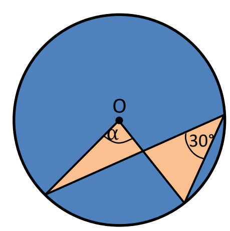
b



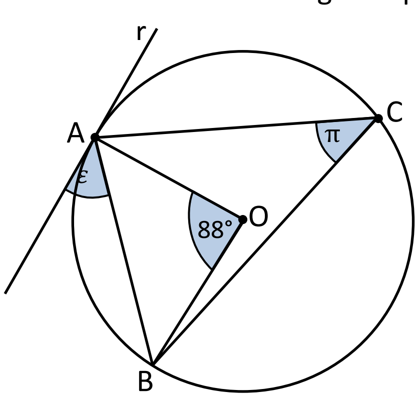
c)



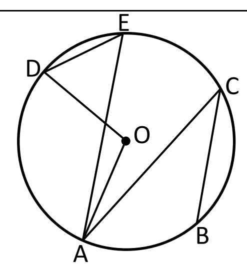
d)



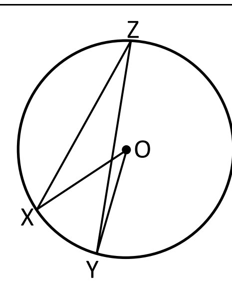
3) r es la recta tangente a la circunferencia en el punto A. O es el centro de la circunferencia. Calcular el valor de los ángulos que faltan.



4) El ángulo $A\hat{C}B$ mide 30° y el arco $\widehat{AB}$ mide la mitad del arco $\widehat{DA}$.
¿Cuál es la medida del ángulo $D\hat{E}A$?

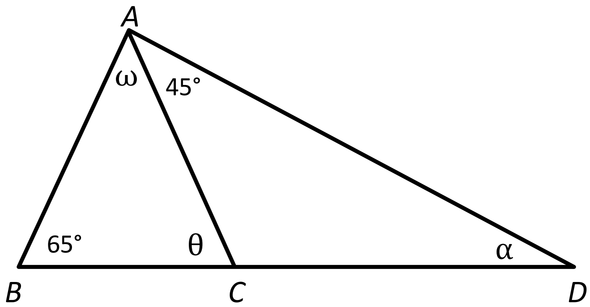


5) La medida del arco $\widehat{XY}$ es 50°.
¿Cuál es la medida del ángulo $X\hat{Z}Y$?

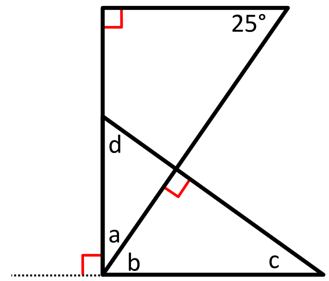


Triángulos

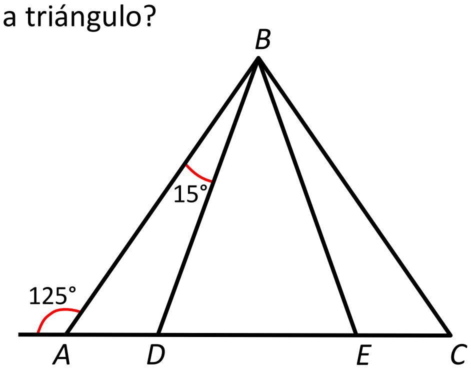
1) Hallar el valor de θ, ω y α. En la figura, AB = AC.



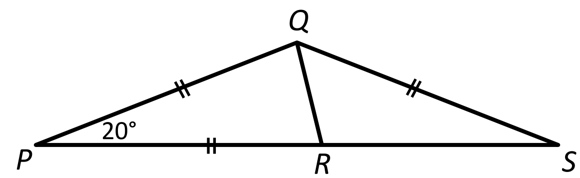
2) Hallar el valor de todos los ángulos que faltan en la siguiente figura.



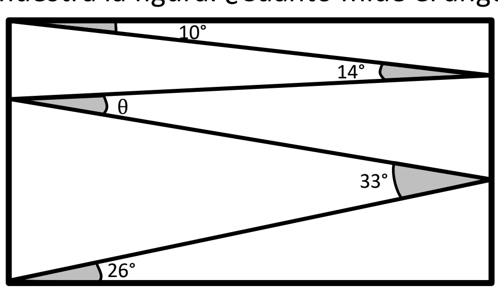
3) Los triángulos *ABC* y *BDE* son isósceles. *AC* y *DE* son las bases. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de cada triángulo?



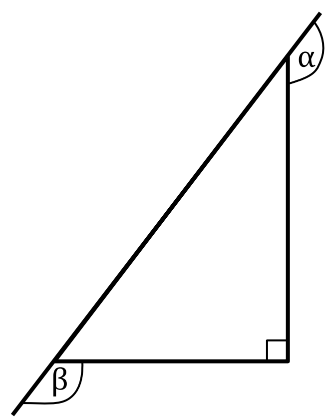
4) En el diagrama, PQ = PR = QS y el ángulo $Q\hat{P}R$ = 20° ¿Cuál es la medida del ángulo $R\hat{Q}S$?



5) Francisco dibujó una línea en zigzag dentro de un rectángulo, formando ángulos de 10°, 14°, 33° y 26° como muestra la figura. ¿Cuánto mide el ángulo θ?

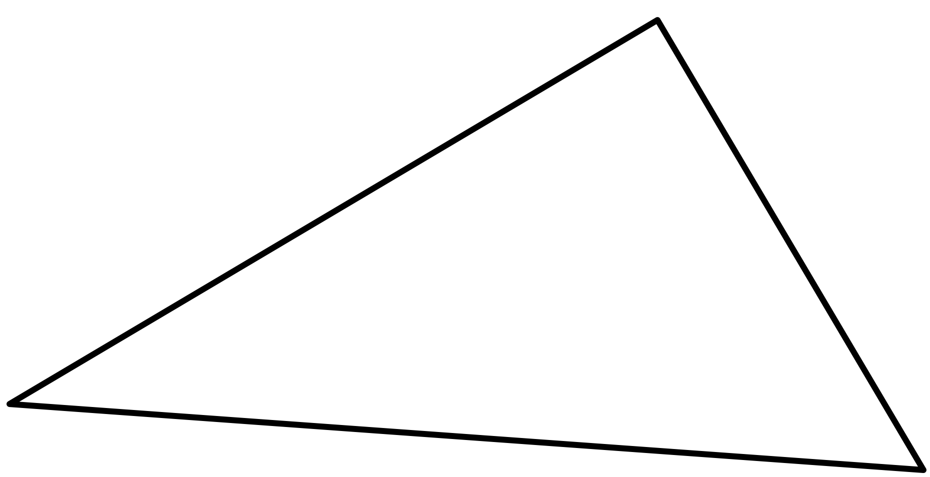


6) ¿ Cuál es la suma de los ángulos α y β?

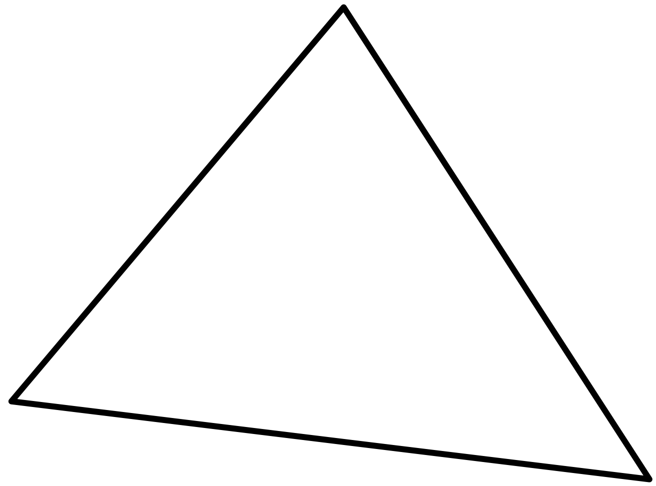


a) 150° b) 180° c) 270° d) 320° e) 360°

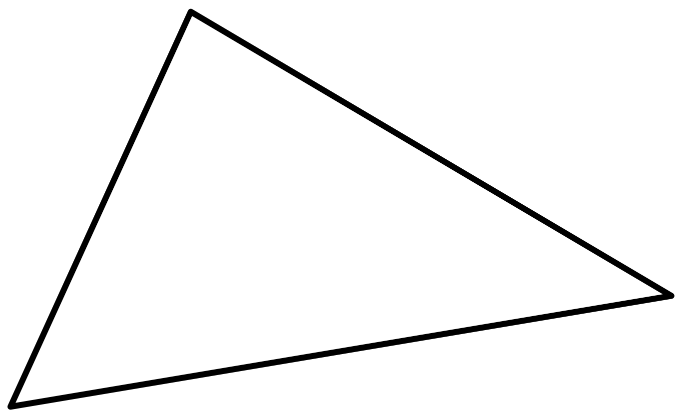
5) Trazar las tres bisectrices del siguiente triángulo y luego dibujar la circunferencia inscrita.



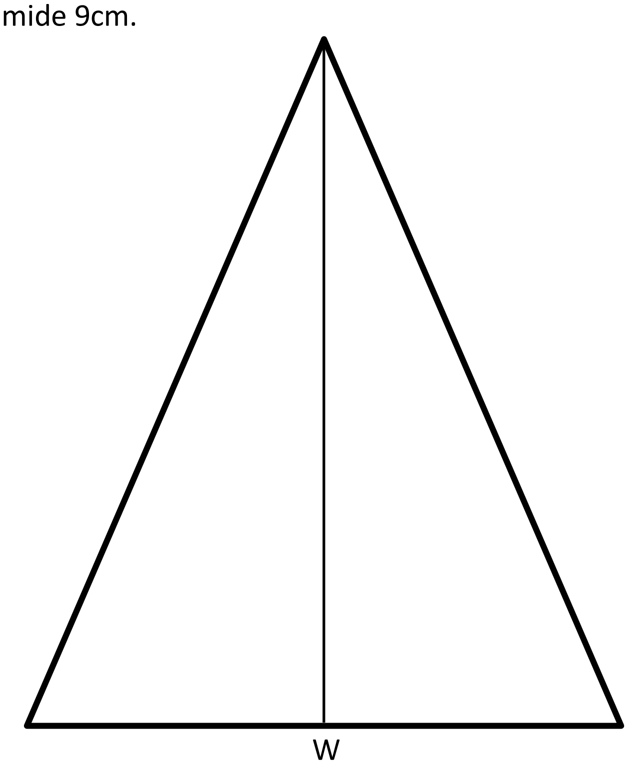
6) Trazar las tres mediatrices del siguiente triángulo y luego dibujar la circunferencia circunscrita.



7) Trazar las alturas del siguiente triángulo:



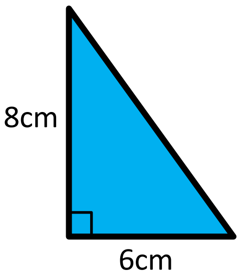
8) El siguiente es un triángulo isósceles, cuya altura mide 9cm.
W es el pie de la altura.
¿Cuál es la distancia desde el baricentro hasta W?



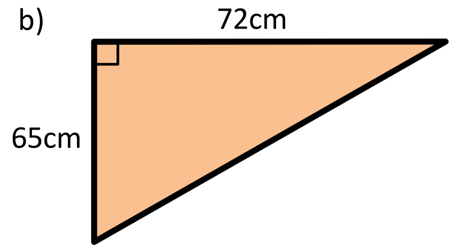
Teorema de Pitágoras (569ac – 475ac)

1) Hallar el valor del lado desconocido de cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

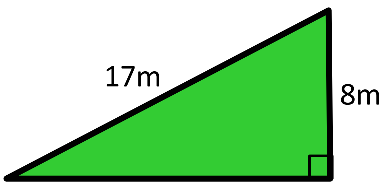
a)



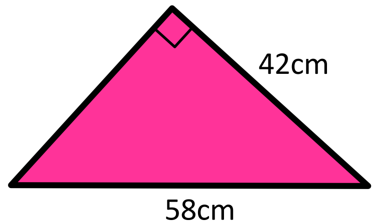
b)

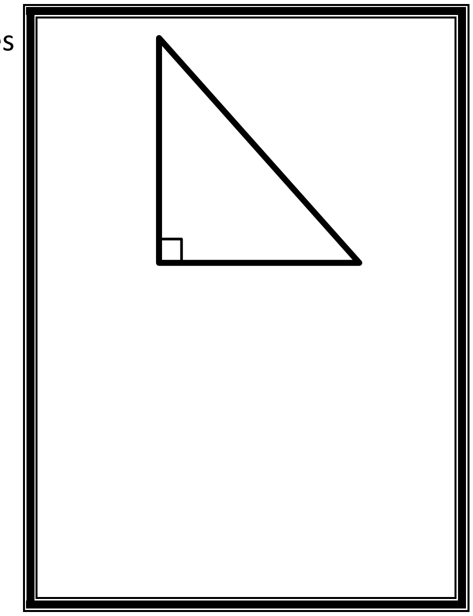


c)

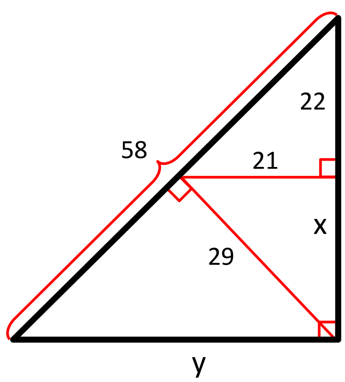


d)





2) En la siguiente figura, hallar el valor de x e y



3) Las medidas proporcionadas a continuación corresponden a triángulos. Indicar cuáles de ellos son triángulos rectángulos.

a) 9, 40, 41

b) 16, 30, 34

c) 29, 21, 20

d) 21, 70, 25

e) 10, 11, 12

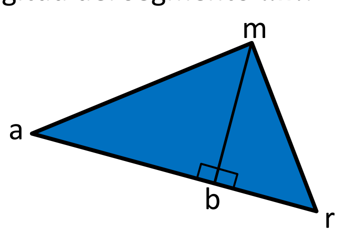
f) 7, 24, 25

4) Hallar la longitud del segmento $\overline{am}$.

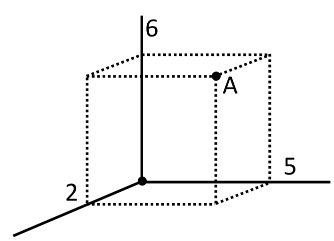
$\overline{mr}$ = 13cm

$\overline{ar}$ = 14cm

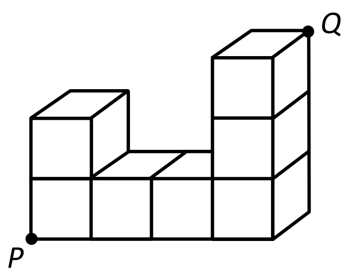
$\overline{mb}$ = 12cm



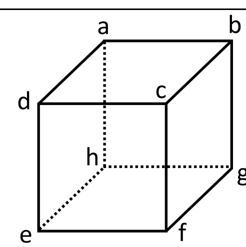
5) La imagen muestra una simulación del rincón de una habitación.
En el punto A se encuentra volando una mosca.
¿Cuál es la distancia de la mosca al rincón de la habitación?



6) Colocamos siete cubos idénticos de lado 1 como en la figura. Calcular la distancia entre los vértices *P* y *Q*.



7) Se tiene un cubo de arista 3cm.
¿Cuánto mide la diagonal $\overline{be}$?

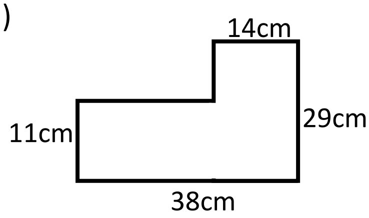


8) Se tiene un cuadrilátero *ABCD*, de lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, con $A\hat{B}C = 90°$, y $A\hat{C}D = 90°$. Si *AB* = 96, *BC* = 72 y *CD* = 90, calcular el perímetro del cuadrilátero *ABCD*.

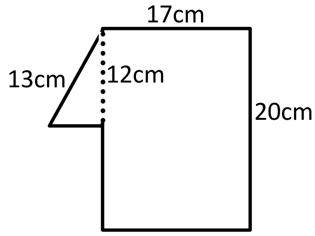
Perímetro

1) Calcular el perímetro de las siguientes figuras:

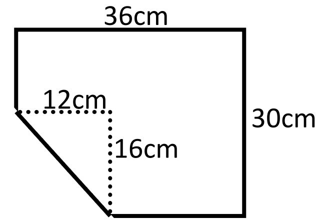
a)



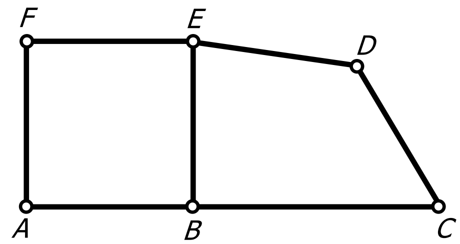
b)



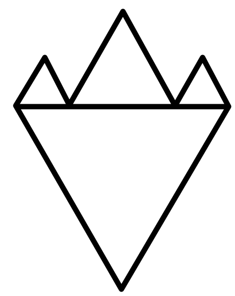
c)



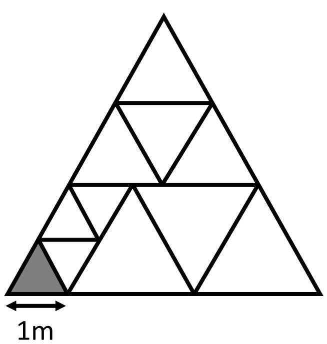
2) En la figura:
ABEF es un cuadrado,
Perímetro de *ABEF* = 48cm,
CD = *DE* = *EF*, *AC* = 30cm.
¿Cuál es el perímetro de *BCDE*?
¿Cuál es el perímetro de *ACDEF*?



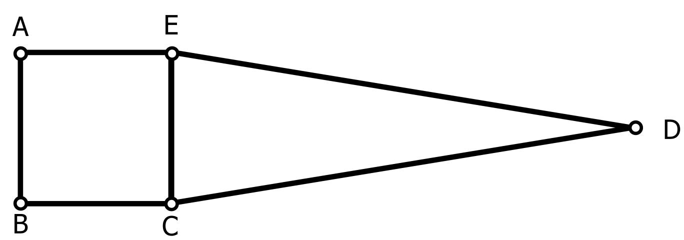
3) La figura está formada por 4 triángulos equiláteros:
1 grande, 1 mediano y 2 pequeños iguales.
El lado del grande es el doble del lado del mediano.
El lado del mediano es el doble del lado del pequeño.
El perímetro del triángulo mediano es 36cm.
¿Cuál es el perímetro de la figura?



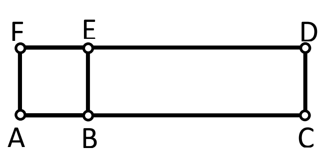
4) Un triángulo equilátero grande está dividido en triángulos equiláteros más pequeños como se ve en la figura. El lado del pequeño triángulo gris mide 1 metro.
¿Cuál es el perímetro del triángulo grande?



5) *ABCE* es un cuadrado,
CDE es un triángulo isósceles.
Perímetro de *ABCE* = 64cm,
Perímetro de *CDE* = 128cm.
¿Cuál es el perímetro de *ABCDE*?

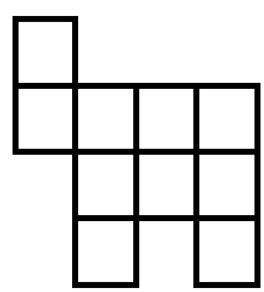


6) ABEF es un cuadrado,
BCDE es un rectángulo,
Perímetro de ABEF = 36cm, BC = 3AB.
¿Cuál es el perímetro de ACDF?

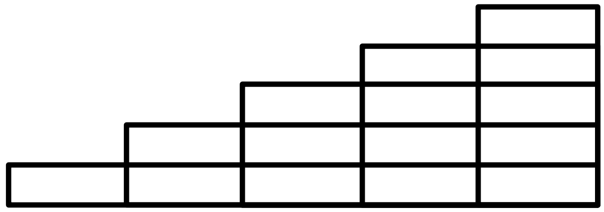


7) La figura está formada por cuadrados iguales.
Cada cuadrado tiene 80cm de perímetro.

¿Cuál es el perímetro de la figura?



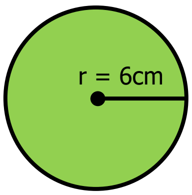
8) Con piezas rectangulares de 8cm de perímetro y con base igual al triple de la altura se arma esta figura.
Cada columna tiene una pieza más que la columna que tiene a su izquierda.



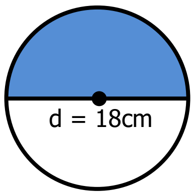
a) ¿Cuál es el perímetro de esta figura?
b) Si se siguen agregando columnas a la derecha de la última de modo que siempre cada columna tiene una pieza más que la columna que tiene a su izquierda,
• ¿Es posible armar una figura de 304cm de perímetro?
• ¿Es posible armar una figura de 1500cm de perímetro?
Si es posible, indicar cuántas columnas tiene la figura.
Si no es posible, explicar por qué.

9) Calcular el perímetro de los sectores sombreados:

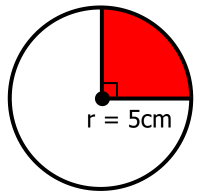
a)



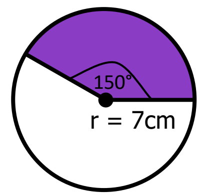
b)



c)

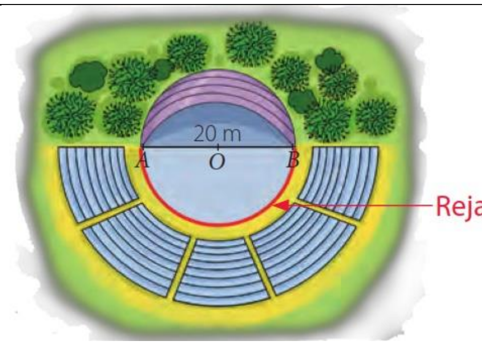


d)



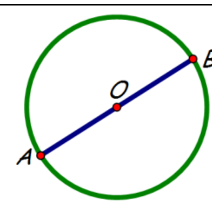
10) Una productora de eventos contratará a una empresa para que instale rejas a parte del escenario donde se realizará un concierto, pero dicha reja solo se colocará en la parte marcada.
Un metro de reja colocada cuesta $1020.

a) ¿Cuál es la longitud de la reja que se debe colocar?
b) ¿Cuánto dinero deberá pagar la productora por la colocación de la reja?



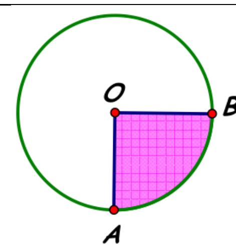
11) La circunferencia tiene centro O y radio OA = 5cm.
AB es un diámetro.
La longitud del arco $\widehat{AB}$ es

a) 15,7cm b) 31,4cm c) 10cm d) 78,5cm



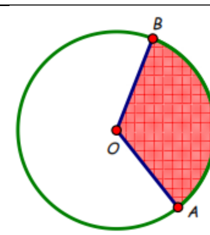
12) El círculo tiene centro O y radio OA = 10cm.
OB es perpendicular a OA.

El perímetro de la región sombreada es:
a) 35,7cm b) 25,7cm c) 15,7cm d) 27,85cm



13) La circunferencia tiene centro O y radio OA = 10cm, $A\widehat{O}B = 120°$.
El arco AB de la parte sombreada tiene una longitud de:

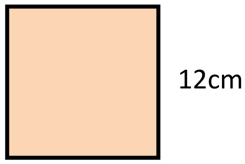
a) 20,93cm b) 10,46cm c) 104,66cm d) 42,33cm



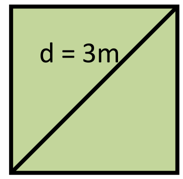
Superficie

1) Calcular la superficie de las siguientes figuras:

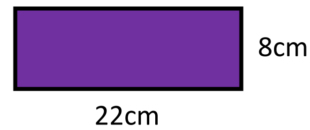
a) Cuadrado de lado 12cm



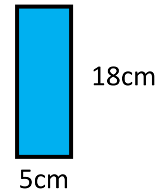
b) cuadrado de diagonal 3m.



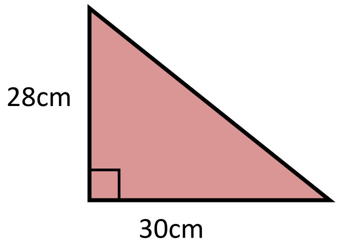
c) Rectángulo



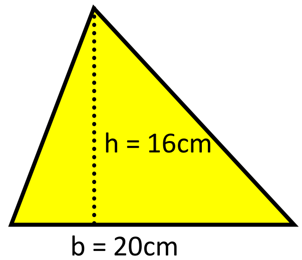
d) Rectángulo



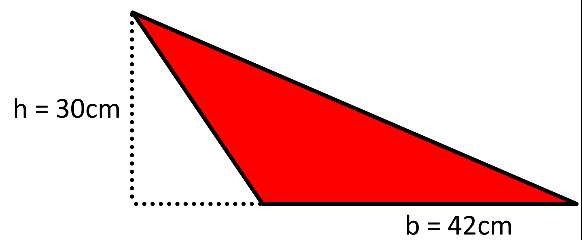
e) Triángulo rectángulo



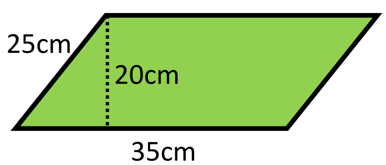
f) Triángulo acutángulo



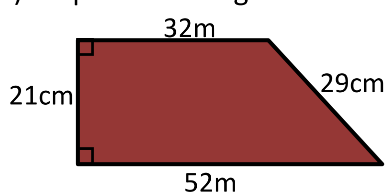
g) Triángulo obtusángulo



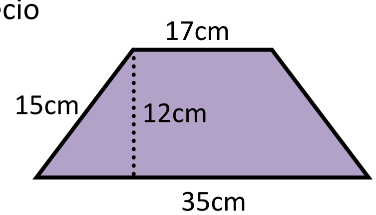
h) Paralelogramo



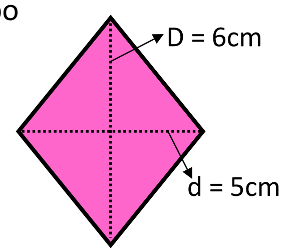
i) Trapecio rectángulo



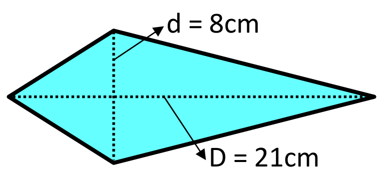
j) Trapecio



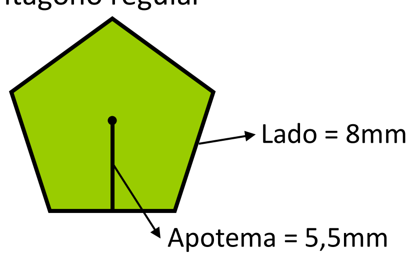
k) Rombo



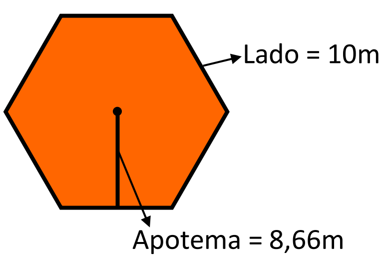
l) Deltoide



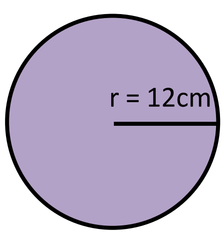
m) Pentágono regular



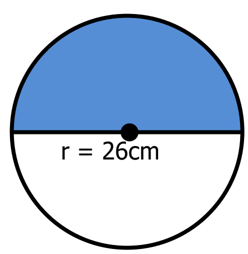
n) Hexágono regular

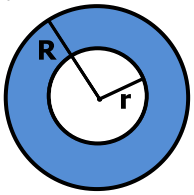
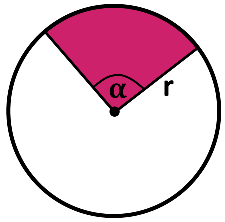
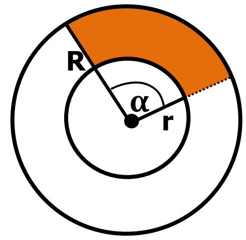


o) Círculo

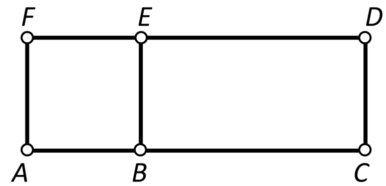


p) Semicírculo

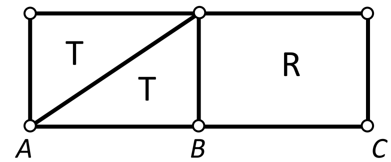


q) Corona circular	r) Sector circular	s) Trapecio circular
 R = 9cm r = 5cm	 r = 12cm ∝ = 58°	 R = 10cm r = 6cm ∝ = 65°

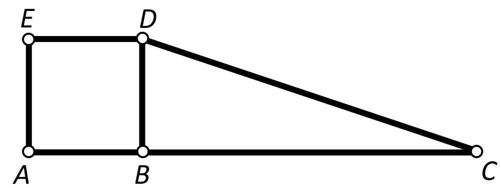
2) ACDF es un rectángulo; BC = 2 AB;
ABEF es un cuadrado de $64cm^2$ de área.
El área de ACDF es:
a) $128cm^2$ b) $48cm^2$ c) $768cm^2$ d) $192cm^2$



3) La figura está partida en un rectángulo R y dos triángulos iguales T. El área de T es de $130cm^2$.
Si AB = BC, ¿cuál es el área de la figura?
a) $520cm^2$ b) $260cm^2$ c) $390cm^2$ d) $650cm^2$

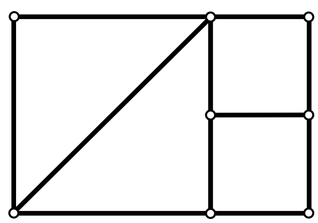


4) En la figura:
ABDE es un cuadrado,
Área de ABDE = $100cm^2$,
AC = 4 AB.
Entonces el Área de ACDE es
a) $250cm^2$ b) $300cm^2$ c) $400cm^2$ d) $500cm^2$

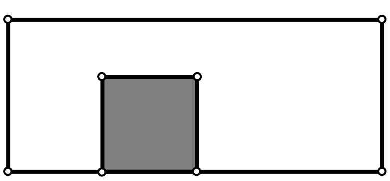


5) La figura está formada por 2 cuadrados pequeños y 1 cuadrado grande que está partido en 2 triángulos. El área de cada uno de los cuadrados pequeños es de $64cm^2$. ¿Cuál es el área de un triángulo?

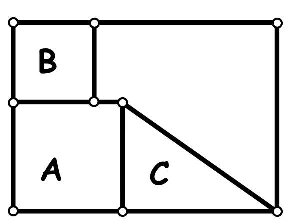
a) $128cm^2$ b) $32cm^2$ c) $54cm^2$ d) $256cm^2$



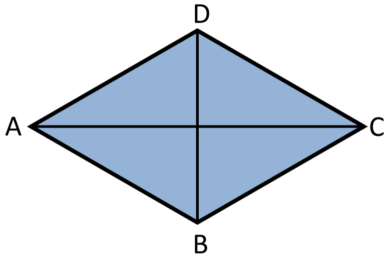
6) En una pared rectangular de 12m de ancho se coloca un portón cuadrado, dejando 3m a la izquierda y el doble a la derecha. La superficie de pared que queda alrededor del portón es $39m^2$.
¿Cuál es la altura de la pared?



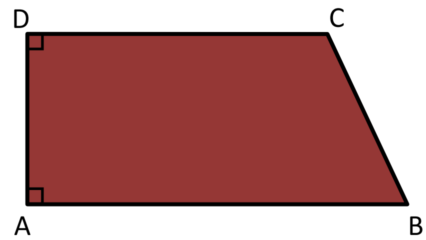
7) De una hoja rectangular se cortan tres pedazos como indica la figura.
A es un cuadrado de $144cm^2$ área.
B es un cuadrado de $81cm^2$ área.
C es un triángulo rectángulo de $102cm^2$ área.
¿Cuál es el área del pedazo que sobra?



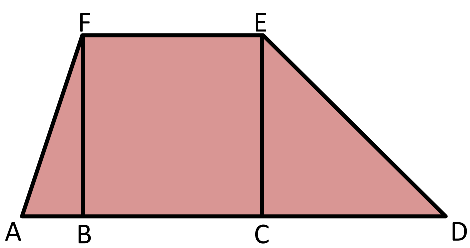
8) Sea ABCD un rombo de lado 2,5cm.
La diagonal mayor mide 4cm.
¿Cuál es la superficie del rombo?



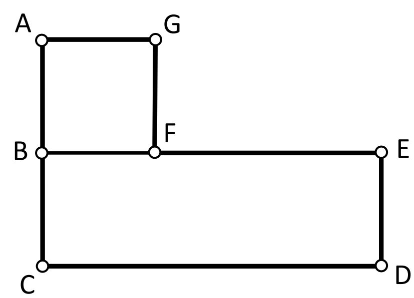
9) Sea ABCD un trapecio rectángulo.
Si AB = 80cm , BC = 37cm y CD = 68cm,
¿Cuál es la superficie del trapecio?



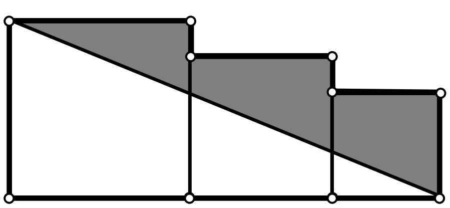
10) *BCEF* es un cuadrado de 48cm de perímetro.
C es el punto medio de $\overline{BD}$.
$\overline{BC} = 3\,\overline{AB}$
¿Cuál es el área del cuadrilátero *ADEF*?



11) *BCDE* es un rectángulo de 48cm^2 de área.
ABFG es un cuadrado.
$\overline{AB} = \overline{BC}$
El área del cuadrado es $\frac{1}{3}$ del área del rectángulo.
¿Cuál es el perímetro de la figura *ACDEFG*?

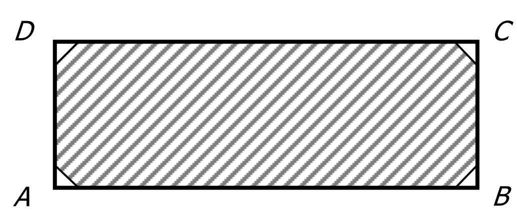


12) Tres cuadrados con lados de longitudes: 10cm, 8cm y 6cm respectivamente, se colocan uno al lado del otro como muestra el dibujo.



¿Cuál es el área de toda la figura?
¿Cuál es el área de la parte no sombreada?
¿Cuál es el área de la parte sombreada?

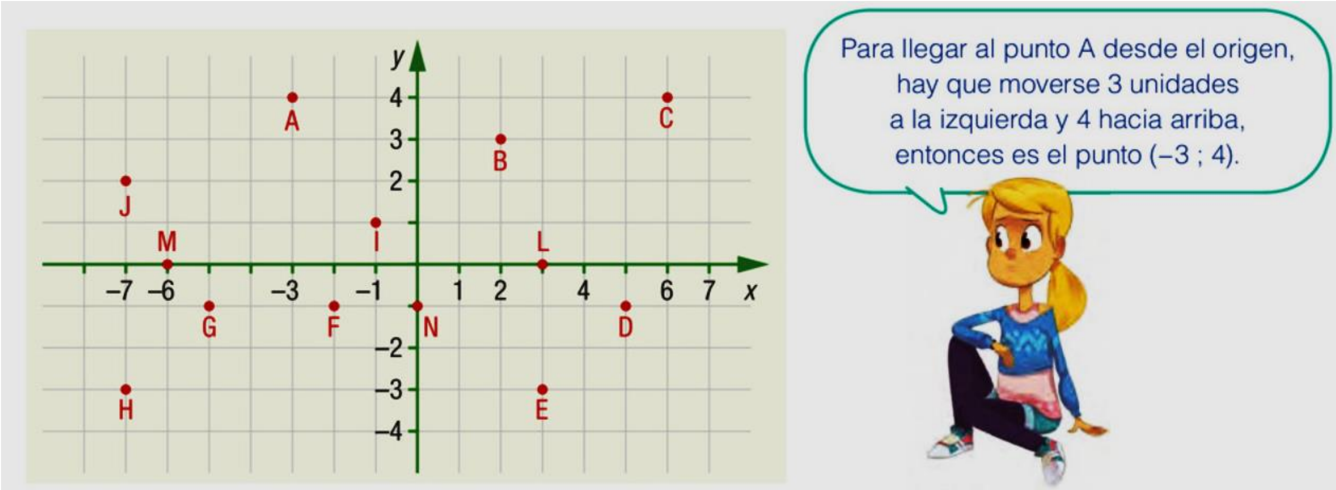
13) Un rectángulo *ABCD* tiene 96cm de perímetro y *AB* = 3 *BC*.
En cada vértice se recortó, como muestra la figura, un triángulo rectángulo isósceles de 2cm de cateto.
¿Cuál es el área de la figura rayada?



Funciones

Ubicar puntos en el plano

1) Natalia observa el gráfico y luego realiza una afirmación que es correcta. Leer atentamente lo que dice Natalia y luego escribir las coordenadas de los otros puntos:



B = (;)	E = (;)	H = (;)	L = (;)
C = (;)	F = (;)	I = (;)	M = (;)
D = (;)	G = (;)	J = (;)	N = (;)

Leer información de un gráfico:

2) En un recipiente se coloca un poco de agua y se la pone a calentar 30 minutos. El gráfico muestra la temperatura del agua en función del tiempo desde que se pone el recipiente al fuego.

a) ¿Cuál es la temperatura del agua cuando se la pone al fuego?

b) ¿Cuál es la temperatura del agua a los 10 minutos?

c) ¿En qué momento la temperatura era de 90° C?

d) El agua hierve a los 100°C. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que hierve el agua? ¿Qué ocurre a partir de ese momento?

3) Una camioneta y un auto circulan por la misma ruta. En este gráfico se representa la distancia al kilómetro 0, a la que se encuentran en diferentes momentos de un día:

a) ¿A qué hora sale el auto? ¿y la camioneta?

b) ¿Cuánto tiempo indica cada cuadradito en el eje horizontal?

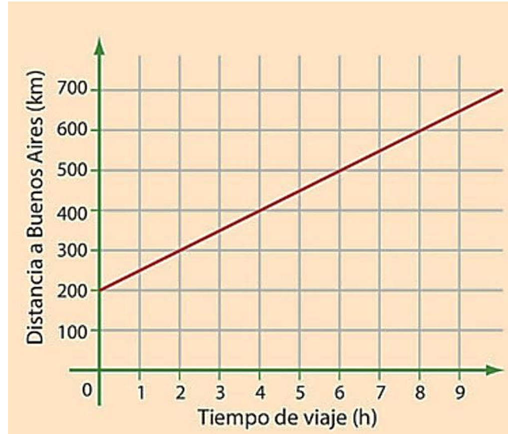
c) ¿En qué momento el auto pasa a la camioneta?

d) ¿Quién llega primero al kilómetro 100? ¿Por qué?

e) ¿A qué hora regresa al punto de partida cada vehículo?

f) ¿En qué momentos el auto y la camioneta están detenidos?

4) Un auto se aleja de Buenos Aires rumbo a Rosario, por la Ruta Nacional N° 9. Para observar la distancia a la que se encuentra de Buenos Aires en todo momento se realizó este gráfico.



a) ¿A qué distancia de Buenos Aires salió el auto?

b) ¿Cuál es la velocidad a la que va el auto?

c) ¿A qué distancia de Buenos Aires se encuentra el auto luego de 7 horas de viaje?

d) Escribir la cuenta que hay que hacer para calcular la distancia a Buenos Aires a la que se encuentra el auto si se conocen las horas que viajó

5) Juan y Teresa estaban jugando con un autito a pila y recolectaron estos datos.

Tiempo de marcha (segundos)	10	15	25
Distancia al inicio de la pista (cm)	65	90	140

a) ¿Son correctas las explicaciones de Juan y Teresa?

De 10 a 15 hay 5 segundos; de 65 a 90 hay 25cm. Entonces, si en 5 segundos recorre 25cm, en un segundo hace 5cm. La velocidad es de 5cm por segundo. En 25 segundos hace 125cm. Si está a 140cm del inicio de la pista, tiene que haber partido de 140 – 145 = 15cm del inicio de la pista. La fórmula es d = 5.t + 15.

De 15 a 25 hay 10 segundos, de 90 a 140 hay 50cm. En 10 segundos hace 50cm. En 1 segundo hace 5cm. Como en 10 segundos hace 50cm, pero a los 10 segundos está en 65cm del inicio de la pista, empezó a 15cm del inicio. La fórmula es d=5.t + 15.

Forma general de una función lineal

$$y = m.x + b$$

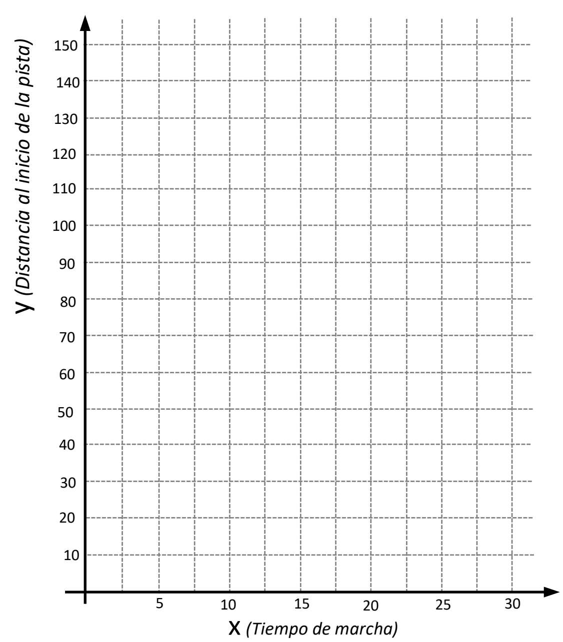
b) ¿A qué distancia del inicio de la pista llegó el autito a los 40 segundos de marcha?

c) ¿En cuánto tiempo recorrió 70cm? ¿Y 150cm?

d) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a 60cm del inicio de la pista?

e) ¿En cuánto tiempo recorrió 1,95 metros?

f) En el par de ejes cartesianos de la derecha, graficar la función que relaciona la distancia al inicio de la pista con el tiempo de marcha.



6) Confeccionar una tabla de valores y graficar las siguientes funciones lineales en un mismo par de ejes cartesianos. En lo posible, utilizar colores diferentes para cada una de ellas.

a) $y = 2.x + 1$

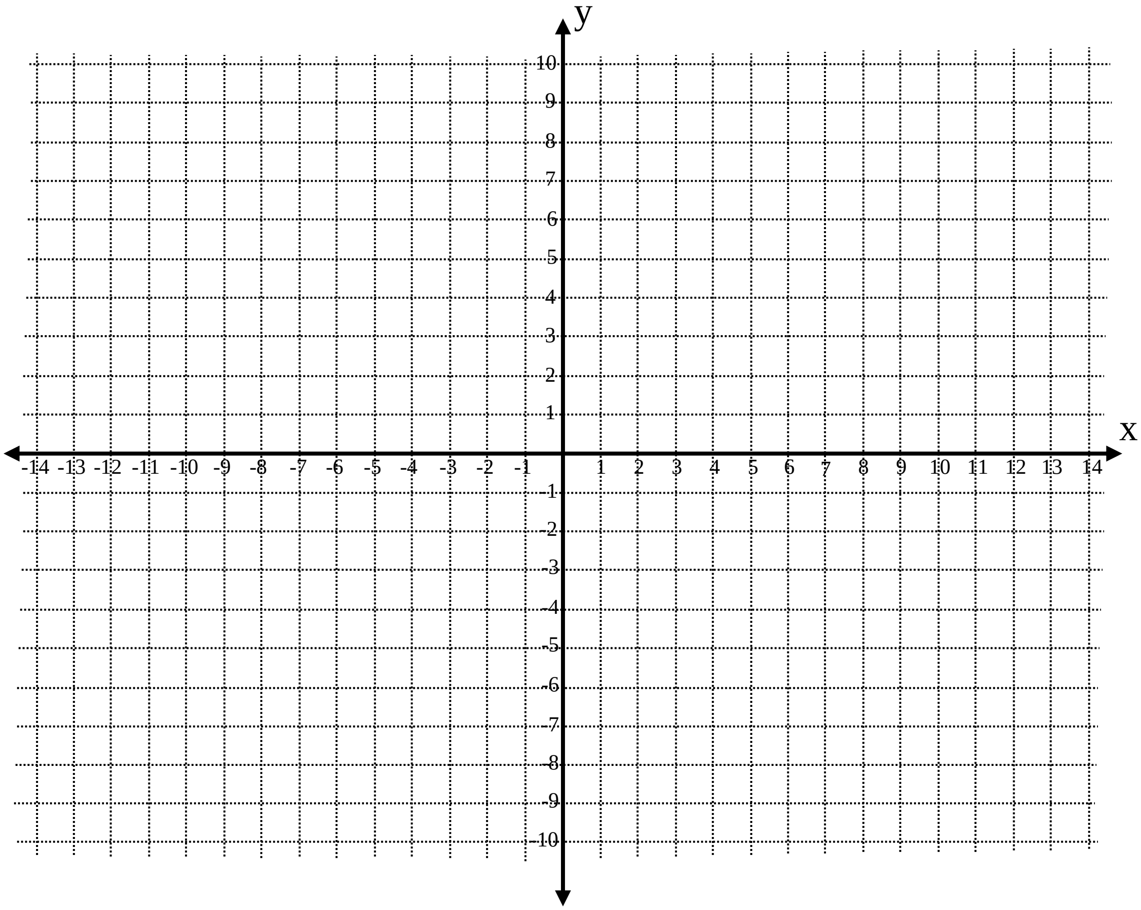
x	Y
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $y = -3.x + 5$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

c) $y = 4.x - 2$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



7) Cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen de cada una de las funciones lineales del punto 6).

8) Observando los gráficos realizados anteriormente, se pueden extraer algunas conclusiones. Completar los espacios en blanco:

Cuando la pendiente de una función lineal es positiva, la función es …………………………………………..

Cuando la pendiente de una función lineal es negativa, la función es ………………………………………

La ordenada al origen de una función lineal, indica el punto en donde la función ……….

9) Escribir la ecuación de una recta que cumplan con las siguientes condiciones:

a) Sea decreciente y tenga ordenada al origen positiva.

b) Sea creciente y tenga ordenada al origen positiva.

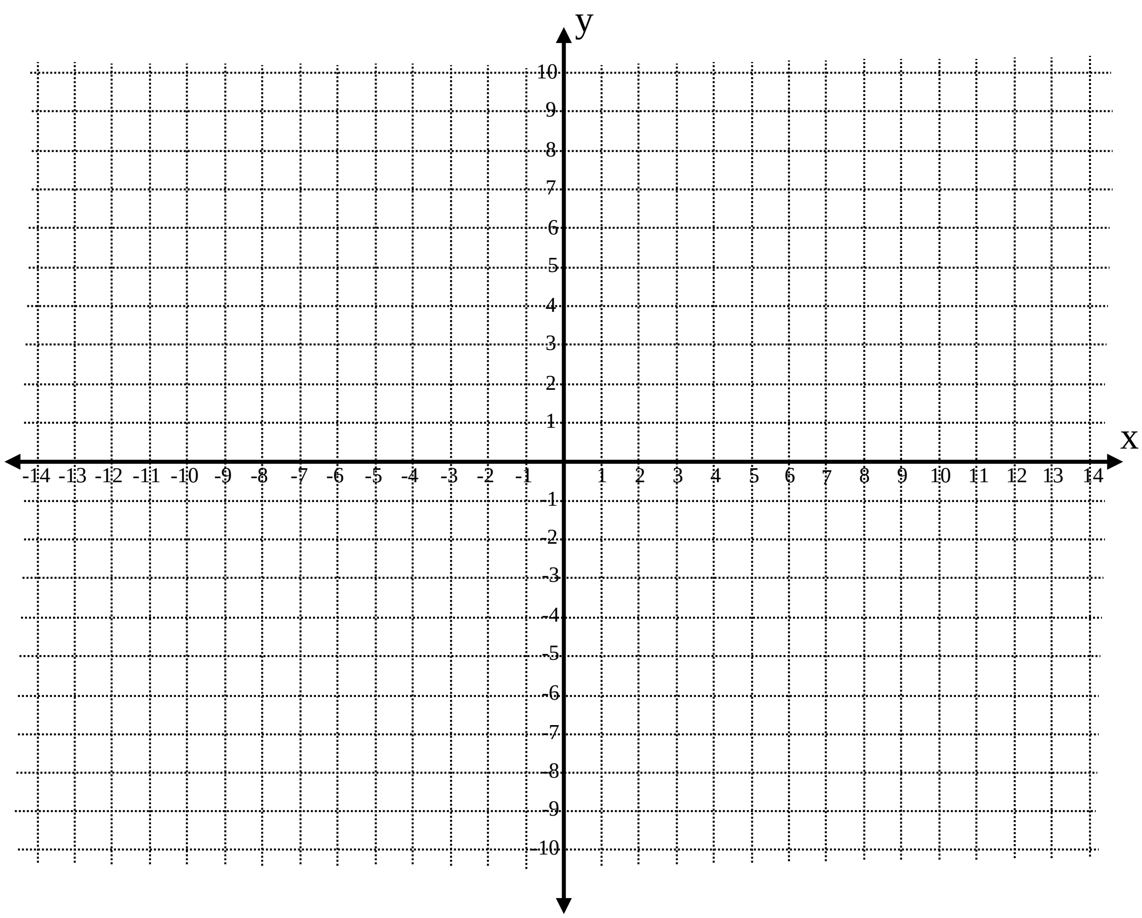
c) Sea decreciente y tenga ordenada al origen igual a 14.

d) No sea ni creciente ni decreciente y tenga ordenada al origen negativa.

Gráfico de funciones lineales sin utilizar tabla de valores

10) Graficar las siguientes funciones lineales en un mismo par de ejes cartesianos, sin utilizar tabla de valores.

a) $y = \frac{3}{4} . x - 8$ b) $y = \frac{3}{4} . x + 1$ c) $y = -\frac{4}{3} . x + 9$



11) Observando los gráficos realizados anteriormente, se pueden extraer algunas conclusiones. Completar los espacios en blanco:

- **Dos rectas son ……………………………… cuando tienen la ……………………………………………………**

- **Dos rectas son …………………………… cuando tienen la ……………………………………………………..**
……

12) Dada la función lineal y = $-\dfrac{3}{4}$.x + 8

a) Escribir la ecuación de una recta paralela a ella pero que tenga ordenada al origen negativa.

b) Escribir la ecuación de una recta perpendicular a ella y que corte al eje y en 5.

c) Escribir, si es posible, la ecuación de una recta paralela a ella que pase por la intersección del eje x con el eje y. Si no es posible, explicar por qué.

d) Escribir, si es posible, la ecuación de una recta perpendicular que sea decreciente. Si no es posible, explicar por qué.

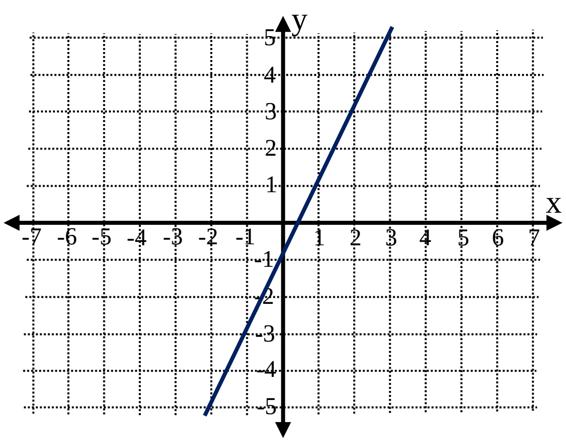
13) Dada la función lineal y = $\dfrac{2}{3}$.x – 6

a) Escribir la ecuación de una recta paralela y de una recta perpendicular a ella.

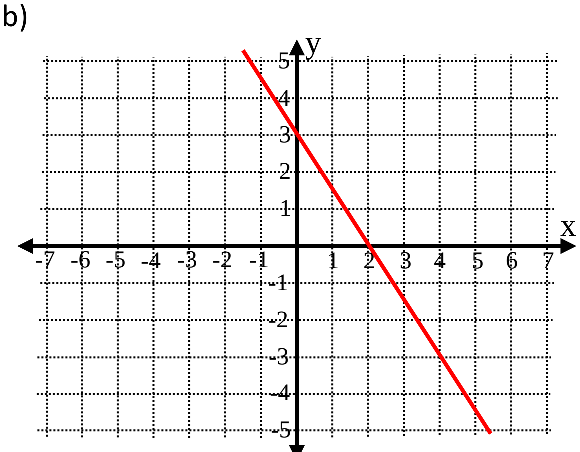
b) Graficar las tres rectas en un mismo par de ejes cartesianos.

14) Dados los siguientes gráficos, escribir la ecuación de la recta que corresponde a cada uno de ellos:

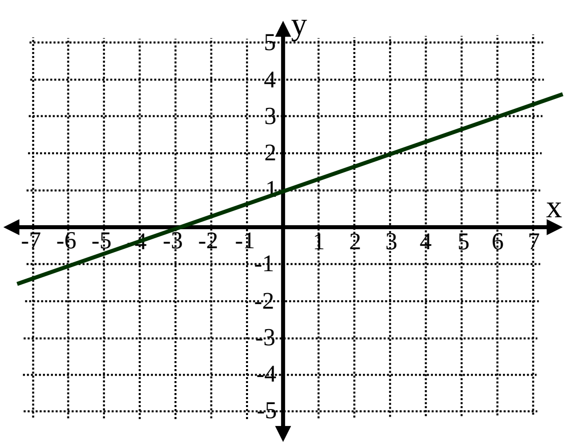
a)



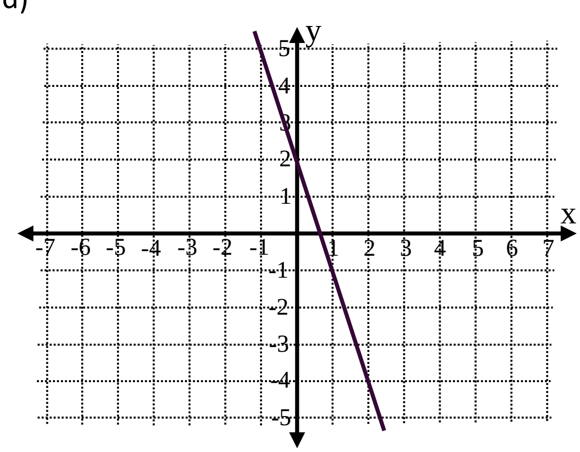
b)



c)



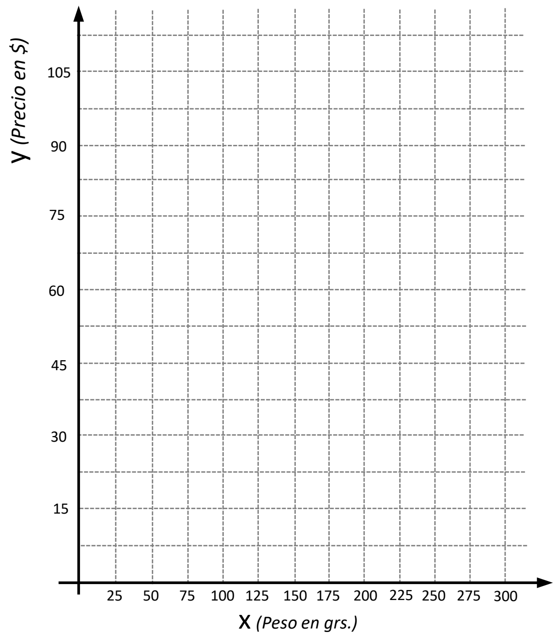
d)



Unidad Nº 5: Proporcionalidad y Porcentaje

1) En un supermercado, 100 gramos de queso cuestan $30. Completar la tabla y graficar:

Peso (grs.)	Precio ($)
100	$30
200	
50	
150	
0	
	$75
300	
25	
175	
	$82,50



Una relación es **directamente proporcional** si al doble de una variable le corresponde el doble de la otra, al triple le corresponde el triple, a la suma le corresponde la suma, a la mitad le corresponde la mitad, etc. La expresión que caracteriza a las **funciones de proporcionalidad directa** es de la forma **y = k.x**, siendo **k** un número fijo llamado constante de proporcionalidad.

2) Un mapa se dibuja con la relación 1:2000. Esto quiere decir que cada unidad de longitud tomada en el mapa representa 2000 unidades en la realidad.

a) Completar la tabla:

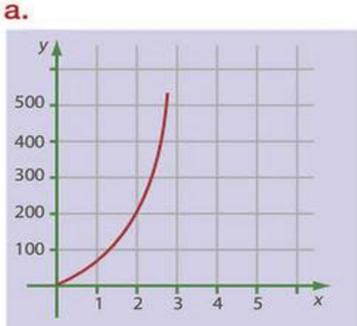
Distancia en el mapa	Distancia real
0cm	
1cm	
1,5cm	
2cm	
2,5cm	
3cm	
4cm	

b) ¿Cuál es la fórmula que permite calcular la distancia real sabiendo la distancia del mapa?

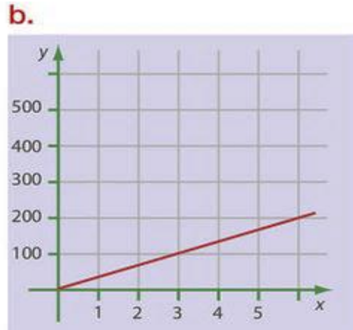
c) ¿Es una función de proporcionalidad directa? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

3) ¿Cuáles de estos gráficos representan variables relacionadas en forma directamente proporcional? Encontrar, en los que sea posible, la constante de proporcionalidad:

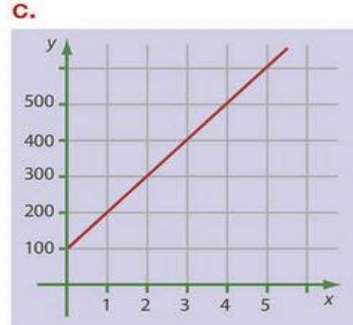
a.



b.

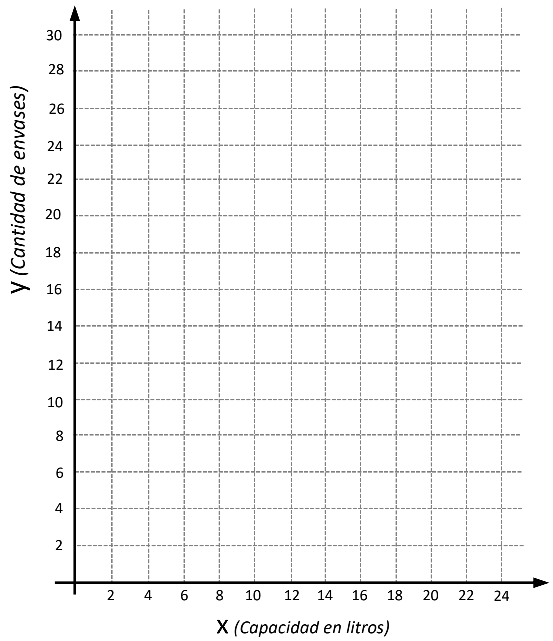


c.



4) Para envasar 48 litros de aceite se dispone de diferentes envases.
Completar la tabla teniendo en cuenta que se pone todo el aceite en envases iguales y graficar.

Capacidad (en litros)	Cantidad de envases
1	
2	
4	
	2
	6
6	
12	
	16
48	
	96



Una relación es **inversamente proporcional** si al doble de una variable le corresponde la mitad de la otra, al triple de una variable le corresponde la tercera parte de la otra, etc.
La expresión que caracteriza a las **funciones de proporcionalidad inversa** es de la forma **y . x = k**, donde **k** es un número fijo llamado constante de proporcionalidad.

Problemas de proporcionalidad

1) Por cuatro horas de trabajo, Alberto ha cobrado $902. ¿Cuánto cobrará por 14 horas de trabajo?

2) Un empleado que trabaja 6 horas diarias recibe como salario $28.560 por mes. El dueño de la fábrica le ha comunicado que la empresa aumentará su horario de trabajo en 2 horas diarias. ¿Cuál será a partir de ahora su sueldo?

3) Tres obreros descargan un camión en cuatro horas. ¿Cuánto tardarán dos obreros?

4) Un camión a 60km/h tarda 55 minutos en cubrir cierto recorrido. ¿Cuánto tardará un auto en recorrer el mismo trayecto yendo a 110km/h?

5) Una máquina embotelladora llena 240 botellas en 20 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en una hora y media?

Proporcionalidad Directa

Proporcionalidad Inversa

6) Un auto que va a 100Km/h necesita 20 minutos en recorrer la distancia entre dos pueblos. ¿Qué velocidad ha de llevar para hacer el recorrido en 16 minutos?

7) Un camión que carga 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes necesitará hacer para transportar la misma cantidad de arena un camión que carga 5 toneladas?

8) Un ganadero tiene 20 vacas y ración para alimentarlas durante 30 días. ¿Cuánto tiempo le durará la ración si vende 5 vacas?

9) En un campamento de 25 niños hay provisiones para 30 días ¿Para cuántos días habrá comida si se incorporan 5 niños al campamento?

10) Una fábrica textil que trabaja 8 horas diarias, puede preparar un pedido en 15 días. ¿Cuántas horas diarias necesitará trabajar la misma fábrica para preparar el pedido en 12 días?

11) Un ganadero tiene 36 ovejas y alimento para ellas por el término de 28 días. Con 20 ovejas más, sin disminuir la ración diaria y sin agregar forraje ¿durante cuántos días podrá alimentarlas?

12) Para envasar cierta cantidad de remedios se emplearon envases de 20ml siendo necesarios 1275 envases. ¿Cuántos envases se necesitarían si su capacidad fuera de 30ml?

13) Si para pintar 180 metros cuadrados de pared se necesitan 24 litros de pintura. ¿cuántos litros se necesitarán para pintar una pared de 270 metros cuadrados?

14) Para bordar 96 metros cuadrados de una tela se necesitan 30kg de lana ¿Cuántos kg de lana se necesitarán para bordar una tela que mide 160 metros cuadrados?

15) Se necesitan 70 litros de pintura para pintar 5 casas de un barrio municipal. ¿Qué cantidad de pintura se requiere para pintar 12 casas del mismo barrio?

16) Si 20 obreros pueden construir una pared en 9 días. ¿Cuántos días tardarán en construir la pared 15 obreros?

17) Pablo tiene que hacer un trayecto de 90 cuadras.
Hace $\frac{2}{3}$ del trayecto corriendo y el resto caminando.
Cuando corre hace 4 cuadras en 3 minutos. Cuando camina hace 5 cuadras en 7 minutos.
Si tiene 2 horas de tiempo para hacer el trayecto, ¿cuántos minutos le sobran?

Porcentaje

Cálculo mental de porcentajes

1) Completar:

Porcentaje	Valor
100%	800
50%	
25%	
10%	
5%	
1%	
15%	
12%	
	600
	24

Porcentaje	Valor
100%	
50%	225
10%	
1%	
20%	
60%	
75%	
15%	
	135
	22,50

Porcentaje	Valor
1%	14,80
10%	
100%	
50%	
	74
	296
	370
	1406
30%	
80%	

Para recordar:

Para calcular fácilmente el 10% de un valor ……………………………………………………………………….

Para calcular fácilmente el 1% de un valor ……………………………………………………………..……………

2.a) ¿Qué cantidad de jabón se lleva gratis según esta promoción?

2.b) Si un kilo de este jabón cuesta $320, ¿cuánto se ahorra por la compra de este paquete de 800 gramos?

3) Por retrasarse en el pago de una factura a Franco lo multaron con un 10% de aumento. Si tenía que pagar originalmente $1240, ¿cuánto tuvo que pagar finalmente?

4) Completar:

a) El 72% de 1400 es …………….

b) El 28% de 1550 es …………….

c) El 45% de 780 es …………….

d) El 91% de 2300 es …………….

e) 48 es el 30% de ………..…….

f) 136 es el 40% de ………………

g) 72 es el 6% de …….,………….

h) 18 es el 90% de ……………….

i) 84 es el …..……….% de 200.

j) 56 es el …………..% de 140.

k) 33 es el …………..% de 110.

l) 32 es el …………..% de 160.

5) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $\frac{1}{4}$ de 120 representa su 25%.

b) $\frac{40}{100}$ de 400 representa su 40%.

c) $\frac{1}{5}$ de 60 es su 5%.

d) El 1% de 240 es $\frac{1}{10}$ de esa cantidad.

e) $\frac{55}{100}$ de 200 es menos que 100.

6) En enero un producto aumenta un 10% y en febrero aumenta un 20% sobre el nuevo precio. ¿Es verdad que aumentó un 30% respecto del precio original?

7) El lunes se vendieron el 30% de los paquetes de galletitas que había en el depósito.
El martes se vendió la cuarta parte de lo que quedaba. Aún quedan 945 paquetes.
¿Cuántos paquetes había al comienzo?

8) Para calcular el 80% de una cantidad, algunas personas multiplican esa cantidad por 0,8.

a) ¿Es correcta esa manera de resolver? ¿Cómo puede explicarse?

b) Escribir una multiplicación que permita averiguar el 60% del número 420.

c) Escribir una multiplicación que permita averiguar el 120% del número 325.

9) Mariano va a comprar un televisor que cuesta \$8990, pero como lo paga en efectivo, le hacen un 20% de descuento.

a) ¿Cuánto le descuentan?

b) ¿Cuánto termina pagando Mariano por el televisor?

10) Lautaro va a comprar un teléfono que cuesta \$12360, pero como lo va a pagar en 12 cuotas, le hacen un recargo del 25%.

a) ¿Cuánto le recargan?

b) ¿Cuánto termina pagando por el teléfono?

c) ¿Cuál es el monto de cada una de las cuotas?

11) En el supermercado ofrecen artículos de pesca con el 25% de descuento.
Compré artículos de pesca y electrodomésticos.
Al llegar a la caja pagué \$5490. Lo que pagué por artículos de pesca era $\frac{1}{3}$ de lo que pagué por electrodomésticos.
¿Cuánto hubiera pagado en total si los artículos de pesca no hubieran estado en oferta?

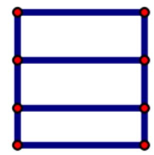
Combinatoria

1) Matías tiene cuatro remeras de color negra, rojo, amarillo y azul y tres pantalones de color verde, azul y marrón.
¿De cuántas maneras distintas puede combinar una remera con un pantalón?

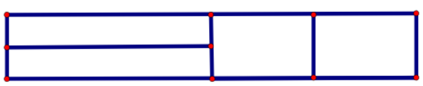
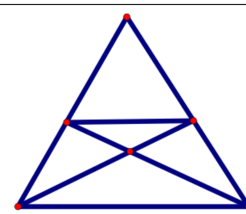
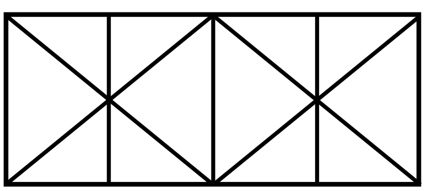
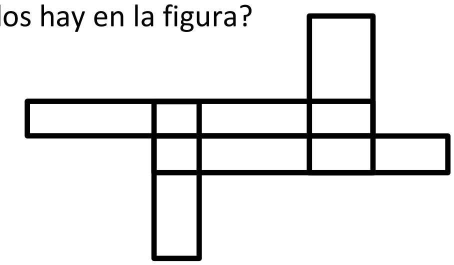
2) Mirta tiene que preparar una ensalada con 4 de los siguientes ingredientes: choclo, lechuga, papa, tomate, zanahoria.
¿Cuántas ensaladas distintas puede preparar?

3) Una banda de rock está formada por un guitarrista, un baterista, un trompetista y un cantante. Para el saludo se ubican en una fila.
Si el cantante nunca puede estar ni al principio ni al final de la fila, ¿de cuántas maneras distintas pueden ubicarse?

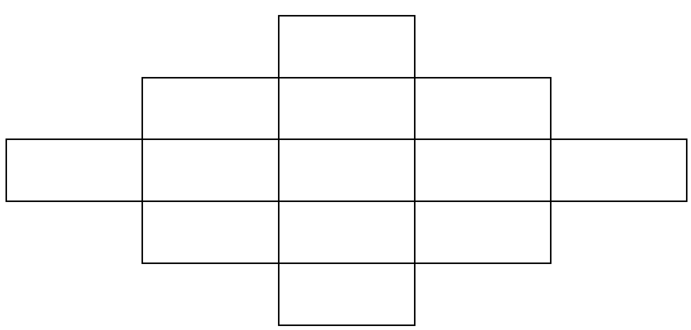
4) Con azul, blanco y rojo, usando 2 ó 3 colores, se quiere pintar la bandera de modo que dos franjas consecutivas sean de distinto color. Se puede hacer de:
a) 6 maneras b) 15 maneras c) 12 maneras d) 3 maneras



5) En el kiosco arman bolsitas para vender.
En cada bolsita ponen dos pelotitas saltarinas de distinto color y una golosina.
Hay pelotitas de color blanco, celeste, negro, rojo y verde.
La golosina puede ser alfajor o turrón.
¿Cuántas bolsitas distintas pueden armar? Da todas las posibilidades.

6) En la figura hay  a) 8 rectángulos b) 6 rectángulos c) 9 rectángulos d) 4 rectángulos	7) En la figura se ven: a) 5 triángulos b) 9 triángulos c) 11 triángulos d) 12 triángulos 
8) ¿Cuántos triángulos hay en la figura? 	9) ¿Cuántos rectángulos hay en la figura? 

10) ¿Cuántos rectángulos hay en la figura?



Probabilidad

1) Una bolsa tiene 9 bolillas blancas, 7 bolillas rojas y 4 bolillas negras. Si se extrae una bolilla al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. Sea negra?
b. Sea roja?
c. Sea verde?
d. Sea blanca o roja?
e. Sea negra y blanca?
f. Sea blanca o roja o negra?

2) Una caja contiene 11 fichas verdes, 8 fichas amarillas y 6 fichas marrones. Si se extrae una ficha al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que:

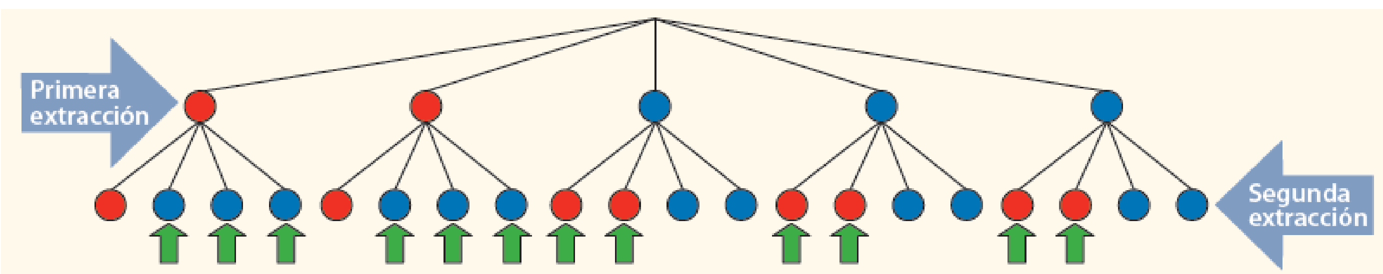
a. Sea marrón?
b. Sea amarilla?
c. Sea roja?
d. Sea amarilla o verde o marrón?
e. Sea amarilla y verde?
f. Sea verde o marrón?

3) Si de un mazo de 50 cartas españolas se extrae una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. No sea un caballo.
b. Sea de copas.
c. Sea de basto.
d. No sea un comodín.
e. No sea un uno ni un dos.
f. Sea un número menor que 5.

4) Con el compañero o compañera de banco, lean y realicen las siguientes actividades:
Una urna contiene dos bolitas rojas y tres azules y se extraen dos de ellas, consecutivamente. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos bolitas de distinto color?

Para analizar esta situación, se puede utilizar un **diagrama de árbol** en el que se registran todos los casos posibles al realizar cada extracción, y se señalan los casos favorables al experimento.



Podemos observar que al realizar la primera extracción hay 5 bolitas que pueden ser escogidas, mientras que al realizar la segunda hay solo 4. Así, por principio multiplicativo, el experimento tiene 5.4 = 20 casos totales.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos bolitas de distinto color?

b) ¿Cuál es la probablidad de que la primera bolita sea roja?

c) ¿Cuál es la probablidad de que la primera bolita sea azul?

d) ¿Cuál es la probablidad de que la primera bolita sea roja y la segunda sea azul?

e) ¿Cuál es la probablidad de que la primera bolita sea azul y la segunda sea roja?

Estadística

1) Se preguntó a 25 familias sobre cuántos hijos tenían. Los resultados fueron los siguientes:

2 – 3 – 1 – 4 – 2 – 2 – 1 – 0 – 5 – 3 – 2 – 3 – 1 – 2 – 4 – 1 – 0 – 1 – 2 – 2 – 3 – 5 – 4 – 0 – 2

a. Completar la siguiente tabla de frecuencias:

Hijos (x)	Fa	Fac	Fr	F%	X.Fa
0					
1					
2					
3					
4					
5					
Totales:					

b. Calcular la media, la moda y la mediana.

c. Confeccionar un gráfico de barras.

2) Se preguntó a 40 personas sobre cuántos hermanos tenían. Los resultados fueron los siguientes:

5 – 2 – 1 – 0 – 3 - 2 – 1 – 4 – 2 – 3 – 1 – 1 – 0 – 3 – 2 – 1 – 2 – 0 – 3 – 4 – 5 – 2 - 3 – 1 – 0 – 2 – 1 – 3 - 2 – 4 – 0 – 2 – 2 – 1 – 0 – 2 – 3 – 2 – 1 - 4

a. Confeccionar una tabla de frecuencias teniendo en cuenta las siguientes columnas:

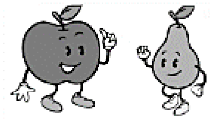
Hermanos (x)	Fa	Fac	Fr	F%	X.Fa
0					
1					
2					
3					
4					
5					
Totales:					

b. Calcular la media, la moda y la mediana.

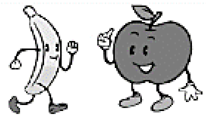
c. Confeccionar un gráfico de barras.

Problemas Varios	Nombre:

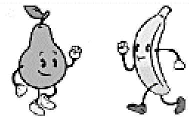
1)



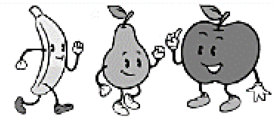
Juntas costamos
50 pesos



Juntas costamos
70 pesos



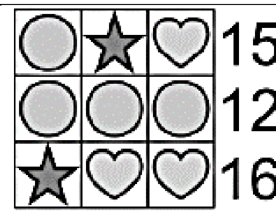
Juntas costamos
10 pesos



¿Cuánto costamos
las tres juntas?

a) 80 pesos b) 90 pesos c) 100 pesos d) 110 pesos e) 120 pesos

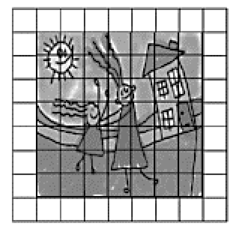
2) Cada figura representa un número diferente. La suma de los tres números de cada fila se indica a la derecha de la fila.



¿Qué número representa  ?

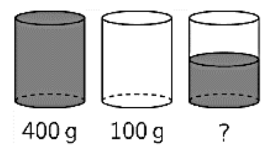
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

3) Ana usó 32 pequeños cuadrados blancos para hacer el marco de un cuadro de 7 por 7.
¿Cuántos de estos pequeños cuadrados blancos necesita para hacer el marco de un cuadro de 10 por 10?



a) 36 b) 40 c) 44 d) 48 e) 52

4) Un vaso lleno de agua pesa 400 gramos. Un vaso vacío pesa 100 gramos. ¿Cuántos gramos pesa un vaso con agua hasta la mitad?

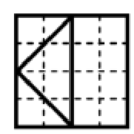


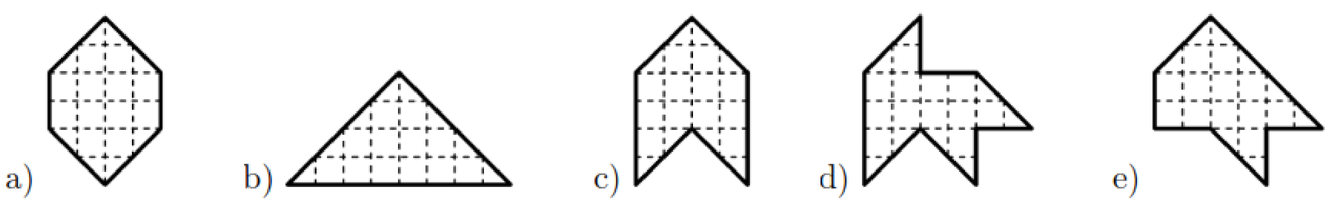
a) 150 gramos b) 200 gramos c) 225 gramos d) 250 gramos e) 300 gramos

5) Adán construyó menos castillos de arena que Martín, pero más que Susana. Lucy construyó más castillos de arena que Adán y también más que Martín. Diana construyó más castillos de arena que Martín, pero menos que Lucy. ¿Quién construyó más castillos?

a) Martín b) Adán c) Susana d) Diana e) Lucy

6) Un cuadrado se cortó en 4 partes, como se muestra en la figura. ¿Cuál de las siguientes formas no puede construir usando las cuatro piezas?





7) Jacobo quiere insertar el dígito 3 en el número 2014 de manera que el número de 5 dígitos que forme sea lo más pequeño posible, ¿Dónde debe colocarlo?

a) antes del 2 b) entre el 2 y el 0 c) entre el 0 y el 1 d) entre el 1 y el 4 e) después del 4

8) En una escuela de verano, 7 niños comen helado cada día, 9 niños comen helado un día sí y uno no. Los demás niños no comen helado. Ayer, 13 niños comieron helado. ¿Cuántos niños comerán helado hoy?

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) no se puede determinar

CONTRATO DIDÁCTICO MATEMÁTICA

El presente contrato implica un compromiso asumido entre el docente de matemática, la familia y el alumno de 2do año, para el ciclo lectivo 2023.

1°) Como profesor de matemática me comprometo a:

- Explicar todos los contenidos abordados durante el año de manera clara y concisa con el consecuente práctico de aplicación, el cual, será explicado y corregido en el pizarrón, (previo trabajo de los alumnos en la clase y ocasionalmente en el hogar).
- Generar un clima de buena convivencia en el aula.
- Cumplir con responsabilidad el rol docente.
- Ser puntual y asistir regularmente a mis clases, salvo causas de fuerza mayor y/o razones de salud que serán debidamente justificadas a la autoridad del Colegio.
- Mantener actualizado el cuaderno de comunicaciones con todas las calificaciones que el/la alumno/a vaya obteniendo a lo largo del ciclo lectivo.

2°) Por su parte el alumno se compromete a:

- Asistir puntual y regularmente a clase.
- En caso de ausencia (por razones de fuerza mayor y/o salud, las cuales deberán ser debidamente justificadas a la autoridad del Colegio), pedir la tarea a un compañero y devolvérsela en forma inmediata.
- No utilizar el celular, los auriculares y cualquier otro artículo de distracción durante la clase, salvo que la actividad a desarrollar requiera del uso de alguna de estas herramientas tecnológicas.
- Comportarse de manera ordenada y ser respetuoso/a tanto con el docente como con sus compañeros.

3°) En cuanto a la familia del alumno, deberá:

- Notificarse y firmar las calificaciones obtenidas, las cuales estarán en el cuaderno de comunicados del alumno.
- En caso de observar bajo rendimiento y/o mal comportamiento del alumno/a (por medio de notas y /o citaciones del profesor), acercarse al Colegio para dialogar al respecto e interiorizarse de la situación.

4°) Con respecto a la acreditación del aprendizaje:

- Se tomarán como mínimo dos evaluaciones escritas por cuatrimestre.
- Se colocará, además, una nota de desempeño global por cuatrimestre, la cual abarcará aspectos relativos a: Trabajo en clase, disciplina y comportamiento, respecto hacia el docente y los compañeros, participación y cumplimiento en tiempo y forma de los trabajos realizados en clase y/o en el hogar.
- La calificación cuatrimestral será TED (Trayectoria Educativa Discontinua), TEP (Trayectoria Educativa En Proceso) o TEA (Trayectoria Educativa Avanzada). Aprobarán es espacio aquellos alumnos que hayan obtenido TEA en ambos cuatrimestres.
- Aclaración: El equivalente a TEA en nota numérica es un rango que va desde 7 a 10. La nota final anual será numérica entre 7 y 10 para aquellos alumnos que hayan obtenido TEA en ambos cuatrimestres.
- Todos aquellos alumnos que hayan obtenido TED o TEP en uno o los dos cuatrimestres deberán asistir a clases extras de intensificación durante los meses de diciembre 2023 y/o febrero 2024, donde deberán acreditar los contenidos no alcanzados.

5°) Con respecto al cuaderno de comunicaciones:

- El alumno deberá llevarlo todos los días obligatoriamente al colegio para presentarlo cada vez que el docente lo solicite para comunicarse con la familia y/o notificar las calificaciones.

Firma del docente   Firma del alumno   Firma del familiar responsable